Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität · gegründet 1825

Institut für
Thermische Verfahrenstechnik

Prof. Dr.-Ing. Matthias Kind **Dr.-Ing. Thomas Wetzel**

Wärmeübertragung I

Lösung zur 13. Übung (Kondensation)

Kondensiert z.B. Wasserdampf an einer kalten Fläche, dann bildet sich an dieser Fläche ein Kondensatfilm, in dem das Kondensat nach unten abläuft. Der Film hat an seiner Oberfläche die zum Dampfdruck gehörige Sattdampftemperatur T_S und an der Wand die Wandtemperatur T_W. Der abzuführende Wärmestrom $\dot{q}$ ist gleich: $\dot{q} = \dot{M}_K \cdot \Delta h_V(T_S)$, wenn man die Unterkühlung des Kondensatfilmes vernachlässigt. Die Definitionsgleichung für den Wärmeübergangskoeffizienten bei Kondensation lautet: $\boxed{\dot{q} = \alpha_K \cdot (T_S - T_W)}$

Die Nusselt-Zahl bei Kondensation ist definiert als $Nu_K = (\alpha_K \cdot \ell)/\lambda_f$ (Index „*f*" = Film, alle Stoffdaten für Flüssigkeit sind bei mittlerer Filmtemperatur $T_f = (T_S + T_W)/2$ zu berechnen). Hier ist ℓ - charakteristische Filmdicke: $\boxed{\ell = \left(\nu_f^2/g\right)^{1/3}}$. Die Korrelation für die *Nu*-Zahl setzt sich aus der Überlagerung der Nu_{lam} und Nu_{turb} (für laminare und turbulente Filmströmung), sowie der s.g. Welligkeits-Korrektur f_{well} (≥ 1) zusammen: $\boxed{Nu_K = \sqrt[1{,}2]{(f_{well} \cdot Nu_{lam})^{1{,}2} + Nu_{turb}^{1{,}2}}}$

Die Welligkeits-Korrektur $f_{well} = Re^{0{,}04}$ bei $Re \geq 1$ und $f_{well} = 1$ bei $Re < 1$.

Die *Nu*-Zahl bei laminarer und turbulenter Strömung hängt von der *Re*-Zahl im Film ab:

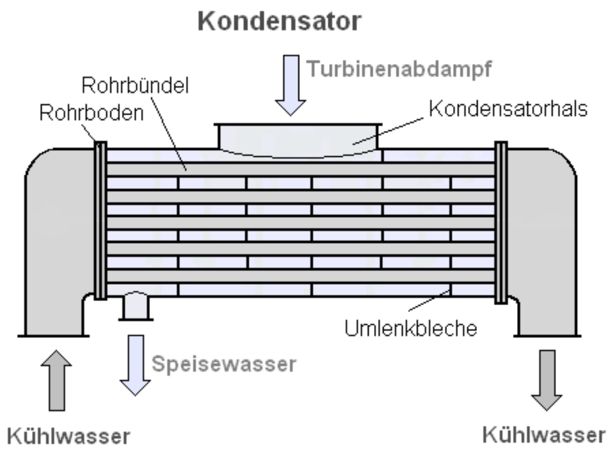
$\boxed{Re_f = \frac{\dot{M}_K}{U \cdot \eta_f}}$ mit $\dot{M}_K$ - Kondensatmassenstrom, η_f - dyn. Viskosität der Flüssigkeit und U – Umfang des Films. Bei Kondensation an einer senkrechten Wand ist $U = b$ – die Wandbreite; an einem senkrechten Rohr: $U = \pi \cdot D_a$ (D_a – Außendurchmesser); an einem waagerechten Rohr $U = L$ (L – Länge des Rohres). Korrelationen für Nu:

$$\boxed{Nu_{lam} = \frac{4}{3} \cdot \left(3 \cdot Re_f\right)^{-1/3}} \qquad \boxed{Nu_{turb} = \frac{0{,}02 \cdot Re_f^{7/24} \cdot Pr_f^{1/3}}{1 + 20{,}52 \cdot Re_f^{-3/8} \cdot Pr_f^{-1/6}}}$$

! Bei **einem waagerecht verlegten** Rohr ist $Nu_{lam} = 0{,}959 \cdot Re_f^{-1/3}$

Bei einer laminaren Filmströmung kann man die *Nu*-Zahl **alternativ** wie folgt berechnen:

$\boxed{Nu_{lam} = \frac{4}{3\sqrt{2}} \cdot (X_\Theta)^{-1/4}}$ mit $\boxed{X_\Theta = \frac{\lambda_f \cdot (T_S - T_W)}{\eta_f \cdot \Delta h_V} \cdot \frac{L_f}{\ell}}$ (wenn Kondensatmassenstrom nicht bekannt). Hier ist L_f – die Höhe (Länge) des Films. Bei einer senkrechten Wand ist L_f – die Wandhöhe; bei einem senkrechten Rohr – die Rohrlänge. Bei einem **waagerecht** verlegten Rohr ist der Außendurchmesser des Rohres in die Formel einzusetzen ($L_f = D_a$). Die Umrechnung auf ein waagerechtes Rohr ist dann wie folgt: $Nu_{lam,Rohr} = 0{,}77 \cdot Nu_{lam,Wand}(L_f = D_a)$.



Lösung Aufgabe 1.

a) Gesamtbilanz (stationär):

$$\dot{M}_W \cdot c_{P,W} \cdot (T_{W,aus} - T_{W,ein}) =$$
$$= \dot{M}_D \cdot \left(x \cdot h'' + (1-x) \cdot h'\right) - \dot{M}_K \cdot h'$$

Indizes: W – Kühlwasser
D – Dampf
K – Kondensat

da $h'' - h' = \Delta h_V$, und $\dot{M}_D = \dot{M}_K$,

Bilanz: $\dot{M}_W \cdot c_{P,W} \cdot (T_{W,aus} - T_{W,ein}) = \dot{M}_D \cdot x \cdot \Delta h_V$

Minimaler Kühlwasserstrom bei $T_{W,aus} = T_S = 33°C$ (Stoffwerte Wasser bei $T_{W,m} \approx 20°C$):

$$\dot{M}_{W,\min} = \frac{\dot{M}_D \cdot x \cdot \Delta h_V}{c_{P,W} \cdot (T_S - T_{W,ein})} = \frac{40 \cdot 0{,}9 \cdot 2423 \cdot 10^3}{4182 \cdot (33-10)} = 906{,}9 \text{ kg/s}$$

b) Tatsächliche Austrittstemperatur des Kühlwassers aus der Gesamtbilanz:

$$\dot{M}_W \cdot c_{P,W} \cdot (T_{W,aus} - T_{W,ein}) = \dot{M}_D \cdot x \cdot \Delta h_V \quad \text{mit} \quad \dot{M}_W = 2 \cdot \dot{M}_{W,\min} = 2 \cdot 906{,}9 = 1813{,}8 \text{ kg/s}$$

$$T_{W,aus} = T_{W,ein} + \frac{\dot{M}_D \cdot x \cdot \Delta h_V}{\dot{M}_W \cdot c_{P,W}} = 10 + \frac{40 \cdot 0{,}9 \cdot 2423 \cdot 10^3}{1813{,}8 \cdot 4182} = 21{,}5\ °C$$

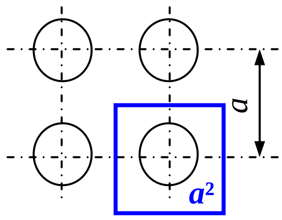
Bilanz (und Kinetik) um das Kühlwasser: $\dot{M}_W \cdot c_{P,W} \cdot (T_{W,ein} - T_{W,aus}) + k \cdot A \cdot \Delta T_{LM} = 0$

$$\Delta T_{LM} = \frac{\Delta T_{ein} - \Delta T_{aus}}{\ln \Delta T_{ein} / \Delta T_{aus}} = \frac{(T_S - T_{W,ein}) - (T_S - T_{W,aus})}{\ln \dfrac{T_S - T_{W,ein}}{T_S - T_{W,aus}}} = \frac{21{,}5 - 10}{\ln \dfrac{33-10}{33-21{,}5}} = 16{,}6\ K$$

$$A = \frac{\dot{M}_W \cdot c_{P,W} \cdot (T_{W,aus} - T_{W,ein})}{k \cdot \Delta T_{LM}} = \frac{1813{,}8 \cdot 4182 \cdot (21{,}5 - 10)}{2000 \cdot 16{,}6} = 2627{,}4 \text{ m}^2 \quad \text{(Schätzwert für } k\text{!!!)}$$

c) Oberfläche eines Rohres: $A_R = \pi d_a \cdot L = \pi \cdot 22 \cdot 10^{-3} \cdot 7 = 0{,}4838 \text{ m}^2$

Anzahl der Rohre: $n = A / A_R = 5434$ Rohre



Quadratische Teilung: jedem Rohr entspricht im Mantelraum eine Querschnittsfläche von ca. a^2. Gesamter Querschnitt somit:

$$n \cdot a^2 = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \quad \rightarrow \quad D = a \cdot \sqrt{n \cdot 4 / \pi} = 0{,}035 \cdot \sqrt{5430 \cdot 4 / \pi} = 2{,}91 \text{ m}$$

d) Querschnitt aller Rohre: $f = n \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d_i^2 = 5430 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}018^2 = 1{,}383 \text{ m}^2$

Strömungsgeschwindigkeit: $\bar{u} = \frac{\dot{V}_W}{f} = \frac{\dot{M}_W}{\rho_W \cdot f} = \frac{1813{,}8}{998{,}4 \cdot 1{,}382} = 1{,}314 \text{ m/s}$

e) Wärmedurchgangskoeffizient: $\frac{1}{k \cdot A_a} = \frac{1}{\alpha_a \cdot A_a} + \frac{s_R}{\lambda_R \cdot A_{m,R}} + \frac{1}{\alpha_i \cdot A_i}$ (Bezugsoberfläche A_a)

$$k = \left(\frac{1}{\alpha_a} + \frac{s_R \cdot A_a}{\lambda_R \cdot A_{m,R}} + \frac{A_a}{\alpha_i \cdot A_i}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{\alpha_a} + \frac{s_R \cdot d_a}{\lambda_R \cdot d_{m,R}} + \frac{d_a}{\alpha_i \cdot d_i}\right)^{-1}; \quad d_{m,R} = \frac{d_a - d_i}{\ln(d_a / d_i)} = 19{,}9 \text{ mm}$$

Wärmeübergang innen: durchströmtes Rohr. Stoffdaten bei $T_{W,m} = (T_{W,ein} + T_{W,aus})/2 \approx 16°C$: Viskosität $\nu = 1{,}13 \cdot 10^{-6}$ m²/s; Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 0{,}597$ W/mK; Prandtl Zahl $Pr = 7{,}9$ (durch Interpolation zwischen 10 und 20°C). $Re = \dfrac{\bar{u} \cdot d_i}{\nu_W} = \dfrac{1{,}315 \cdot 0{,}018}{1{,}13 \cdot 10^{-6}} = 20927$ (turbulent)

$$Nu = \frac{(\xi/8) Re Pr}{1 + 12{,}7(\xi/8)^{1/2}\left(Pr^{2/3} - 1\right)} \cdot \left(1 + \left(\frac{d_h}{L}\right)^{2/3}\right) = 171{,}15 \quad \text{mit} \quad \xi = (1{,}8 \cdot \lg Re - 1{,}5)^{-2} = 0{,}02538$$

$$\alpha_i = Nu_i \cdot \lambda_W / d_i = 5676{,}47 \text{ W/m²K}$$

Wärmeübergang außen: Kondensation (laminar). Für die Stoffdaten wird die mittlere Temperatur des Kondensatfilms benötigt (Mittelwert zwischen Temperatur der Außenoberfläche des Rohres und Siedetemperatur). Mit dem Schätzwert für $k = 2000$ W/m²K ergibt sich:

$$T_O = T_i + k \cdot \left(\frac{d_a}{\alpha_i \cdot d_i} + \frac{s_R \cdot d_a}{\lambda_R \cdot d_{m,R}}\right) \cdot (T_S - T_i) = 24{,}5\,°C\,; \qquad \overline{T}_F = \frac{T_O + T_S}{2} = 28{,}6\,°C$$

Stoffdaten bei $\overline{T}_F$: $\nu = 0{,}83 \cdot 10^{-6}$ m²/s; $\lambda = 0{,}606$ W/mK; $\eta = 828{,}4 \cdot 10^{-6}$ kg/(m·s); $Pr = 6{,}7$

Annahme: $Nu_a \approx Nu_{lam}$; Massenstrom bekannt → rechnen über $Nu_{lam} = 0{,}959 \cdot (Re)^{-1/3}$

Einflüsse durch abtropfendes Kondensat auf weiter unten liegende Rohre vernachlässigen:

Massenstrom auf jedem Rohr: $\dot{M}_R = \dot{M}_{gesamt} / n$; $Re = \dot{M}_R / (U \cdot \eta) = 1{,}27$ mit $U = L$.

$$Nu_{lam} = 0{,}89\,; \quad \rightarrow \quad \alpha_a = \frac{Nu_a \cdot \lambda}{\ell} = 13009 \text{ W/m²K} \quad \text{mit} \quad \ell = \sqrt[3]{\nu^2/g} = 4{,}13 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$k = \left(\frac{1}{\alpha_a} + \frac{s_R \cdot d_a}{\lambda_R \cdot d_{m,R}} + \frac{d_a}{\alpha_i \cdot d_i}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{13059{,}1} + \frac{0{,}002 \cdot 0{,}022}{80 \cdot 0{,}0199} + \frac{0{,}022}{5569{,}5 \cdot 0{,}018}\right)^{-1} \frac{\text{W}}{\text{m²K}} = 3127 \frac{\text{W}}{\text{m²K}}$$

Weiter iterativ (s.a. Seite 7) neuer k-Wert -> neue Oberfläche -> neue Rohrlänge (bei gleichem Durchmesser) -> neue Re-Zahl -> neue Nu-Zahl -> neuer α-Wert -> neuer k-Wert u.s.w. bis sich der k-Wert nicht mehr ändert.

f) Durch die Schmutzschicht kommt ein zusätzlicher Wärmeübergangswiderstand dazu:

$$k = \left(\frac{1}{\alpha_a} + \frac{s_G \cdot d_a}{\lambda_G \cdot d_{m,G}} + \frac{s_R \cdot d_a}{\lambda_R \cdot d_{m,R}} + \frac{d_a}{\alpha_i \cdot d_{G,i}}\right)^{-1}$$

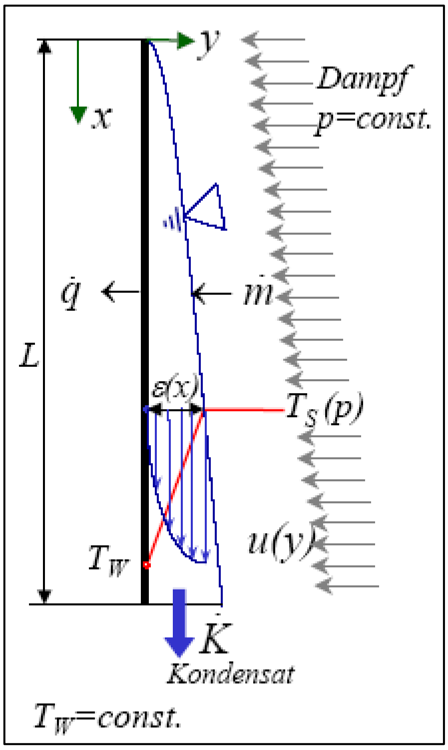
$$d_{m,G} = \frac{d_{G,a} - d_{G,i}}{\ln\left(d_{G,a} / d_{G,i}\right)} = \frac{d_{R,i} - (d_{R,i} - 2 \cdot s_G)}{\ln\left(d_{R,i} / (d_{R,i} - 2 \cdot s_G)\right)} = \frac{0{,}018 - (0{,}018 - 2 \cdot 0{,}05 \cdot 10^{-3})}{\ln\left(0{,}018 / (0{,}018 - 2 \cdot 0{,}05 \cdot 10^{-3})\right)} = 0{,}01795 \text{ m}$$

$$k = \left(\frac{1}{13009{,}2} + \frac{0{,}05 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}022}{0{,}35 \cdot 0{,}01795} + \frac{0{,}02 \cdot 0{,}022}{80 \cdot 0{,}0199} + \frac{0{,}022}{5569{,}5 \cdot 0{,}018}\right)^{-1} \frac{\text{W}}{\text{m²K}} = 2020{,}57 \frac{\text{W}}{\text{m²K}}$$

Lösung Aufgabe 2.

a) Gesamtbilanz um das Kondensat: $\dot{H}_{zu} - \dot{H}_{ab} - \dot{Q}_{ab} = 0$; $\quad \dot{M}_D \cdot h'' - \dot{M}_K \cdot h' - \dot{Q} = 0$;

$\dot{M}_D = \dot{M}_K$ und $h'' - h' = \Delta h_V$, somit aus der Bilanz: $\dot{Q}_{ab} = \dot{M}_K \cdot \Delta h_V = 76$ kW



b) $\dot{M}_K(L) = \dot{V}_K(L) \cdot \rho_f = \bar{u}(L) \cdot f(L) \cdot \rho_f = 120$ kg/h

mit Filmquerschnitt an der Stelle L: $f(L) = \pi \cdot D \cdot \varepsilon(L)$

Unbekannt ist die mittlere Geschwindigkeit $\bar{u}(L)$.

Mit gegebenem Geschwindigkeitsprofil (beliebiges x):

$$\bar{u}(x) = \frac{1}{\varepsilon(x)} \cdot \int_0^{\varepsilon(x)} u(y)dy = \frac{g}{\varepsilon(x) \cdot \nu_f} \cdot \int_0^{\varepsilon(x)} \left(\varepsilon(x) \cdot y - \frac{y^2}{2} \right) dy =$$

$$= \frac{g \cdot \varepsilon(x)}{\varepsilon(x) \cdot \nu_f} \cdot \int_0^{\varepsilon} y dy - \frac{g}{2 \cdot \varepsilon(x) \cdot \nu_f} \cdot \int_0^{\varepsilon} y^2 dy =$$

$$= \frac{g \cdot \varepsilon(x)}{\varepsilon(x) \cdot \nu_f} \cdot \frac{\varepsilon(x)^2}{2} - \frac{g}{2 \cdot \varepsilon(x) \cdot \nu_f} \cdot \frac{\varepsilon(x)^3}{3} = \frac{g}{\nu_f} \cdot \frac{\varepsilon(x)^2}{3}$$

$$\dot{M}_K(x) = \frac{g}{\nu_f} \cdot \frac{\varepsilon(x)^2}{3} \cdot \pi D \varepsilon(x) \rho_f; \quad \varepsilon(x) = \sqrt[3]{\frac{\dot{M}_K(x) \cdot 3\nu_f}{g \cdot \pi \cdot D \cdot \rho_f}};$$

bei $x = L$ folgt für $\dot{M}_K(L) = 120$ kg/h: $\varepsilon(L) = \sqrt[3]{\dfrac{120 \cdot 3 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3}}{3600 \cdot 980 \cdot 9{,}81 \cdot \pi \cdot 0{,}05 \cdot 980}} = 0{,}323$ mm

c) $Re_f = Nu_f \cdot X_\Theta$: $\quad Re_f = \dfrac{\dot{M}_K}{U \cdot \eta_f}$; $\quad Nu_f = \dfrac{\alpha \cdot \ell}{\lambda_f}$; $\quad X_\Theta = K_L \cdot K_T = \dfrac{L}{\left(\nu_f^2/g\right)^{1/3}} \cdot \dfrac{\lambda_f \cdot (T_S - T_W)}{\eta_f \cdot \Delta h_V}$

Alles einsetzen: $\dfrac{\dot{M}_K}{U \cdot \eta_f} = \dfrac{\alpha \cdot \ell}{\lambda_f} \cdot \dfrac{L}{\left(\nu_f^2/g\right)^{1/3}} \cdot \dfrac{\lambda_f \cdot (T_S - T_W)}{\eta_f \cdot \Delta h_V}$; mit $\ell = \left(\nu_f^2/g\right)^{1/3}$ folgt

$\dot{M}_K \cdot \Delta h_V = \alpha \cdot L \cdot U \cdot (T_S - T_W)$. Aus der Bilanz $\dot{Q}_{ab} = \dot{M}_K \cdot \Delta h_V$ → $\dot{Q}_{ab} = \alpha \cdot A \cdot (T_S - T_W)$.

Der kinetischer Ansatz stimmt, also stimmt auch die Beziehung $Re_f = Nu_f \cdot X_\Theta$.

d) T_W aus der Kinetik: $T_W = T_S - \dfrac{\dot{Q}_{ab}}{\alpha \cdot A}$; $\quad A = \pi \cdot D \cdot L = 0{,}314$ m²; $\quad \alpha = \dfrac{Nu \cdot \lambda_f}{\ell}$

$\ell = \left(\dfrac{\nu_f^2}{g}\right)^{1/3} = 0{,}03$ mm; laminare Filmströmung: $\quad Nu = Nu_{lam} = \dfrac{4}{3} \cdot (3 \cdot Re)^{-1/3} = 0{,}123$

mit $\quad Re_f = \dfrac{\dot{M}_K}{U \cdot \eta_f} = \dfrac{\dot{M}_K}{\pi D \cdot \eta_f} = 424{,}4$ $\qquad$ (s.a. Seite 7)

$\alpha = \dfrac{0{,}123 \cdot 0{,}65}{0{,}03 \cdot 10^{-3}} = 2665$ W/m²K; $\quad$ → $\quad T_W = 100 - \dfrac{76000}{2665 \cdot 0{,}314} = 9{,}2$ °C

Zur Aufgabe 1.

Bei der iterativen Berechnung von *Nu*-Zahl ausgehend von der vorgegebenen Rohrlänge $L^{(0)}$ = 7 m, bekommt man folgende Ergebnisse:

ohne Gallert

k alt	A	A M Rohr	L	Nu i	α i	Re F	Nu a	α a	k neu
W/m²K	m²	m²	m		W/m²K			W/m²K	W/m²K
2000,00	2628,78	0,4838	7,000	171,150	5676,47	1,2695	0,8857	13009,2	3126,75
3126,75	1681,47	0,3095	4,477	172,244	5712,77	1,9847	0,7631	11208,9	3022,98
3022,98	1739,19	0,3201	4,631	172,150	5709,63	1,9189	0,7717	11335,7	3031,05
3031,05	1734,56	0,3192	4,619	172,157	5709,88	1,9240	0,7711	11325,6	3030,42
3030,42	1734,93	0,3193	4,620	172,157	5709,86	1,9236	0,7711	11326,4	3030,47
3030,47	1734,90	0,3193	4,620	172,157	5709,86	1,9236	0,7711	11326,3	3030,46
3030,46	1734,90	0,3193	4,620	172,157	5709,86	1,9236	0,7711	11326,3	3030,46
3030,46	1734,90	0,3193	4,620	172,157	5709,86	1,9236	0,7711	11326,3	3030,46

mit Gallert

k alt	A	A M Rohr	L	Nu i	α i	Re F	Nu a	α a	k neu
W/m²K	m²	m²	m		W/m²K			W/m²K	W/m²K
2000,00	2628,78	0,4838	7,000	171,150	5676,47	1,2695	0,8857	13009,2	2020,57
2020,57	2602,02	0,4789	6,929	171,172	5677,19	1,2826	0,8827	12964,9	2019,61
2019,61	2603,25	0,4791	6,932	171,171	5677,16	1,2820	0,8828	12966,9	2019,65
2019,65	2603,20	0,4791	6,932	171,171	5677,16	1,2820	0,8828	12966,8	2019,65
2019,65	2603,20	0,4791	6,932	171,171	5677,16	1,2820	0,8828	12966,8	2019,65

Zur Aufgabe 2.

Wenn die *Re*-Zahl relativ groß ist, ist die Annahme laminarer Strömung nicht immer gerechtfertigt. Ggf. muss man mit der Überlagerung der Formel für laminare und turbulente Strömung rechnen: $Nu = \sqrt[1,2]{(f_{well} \cdot Nu_{lam})^{1,2} + Nu_{turb}^{1,2}}$. In der Aufgabe 2 bei Re_f = 424,4 und

$$Pr_f = \frac{\eta_f \cdot c_{p,f}}{\lambda_f} = 3{,}23, \quad \text{ist} \quad f_{well} = Re^{0,04} = 1{,}274; \quad Nu_{lam} = \frac{4}{3} \cdot \left(3 \cdot Re_f\right)^{-1/3} = 0{,}123;$$

$$Nu_{turb} = \frac{0{,}02 \cdot Re_f^{7/24} \cdot Pr_f^{1/3}}{1 + 20{,}52 \cdot Re_f^{-3/8} \cdot Pr_f^{-1/6}} = 0{,}063 \text{ (gleiche Größenordnung!); also } Nu = 0{,}199;$$

somit $\alpha = \frac{0{,}199 \cdot 0{,}65}{0{,}03 \cdot 10^{-3}} = 4311{,}7$ W/m²K → $T_W = 100 - \frac{76000}{4311{,}7 \cdot 0{,}314} = 43{,}9\ °C$!!!