Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität · gegründet 1825

Institut für
Thermische Verfahrenstechnik

Prof. Dr.-Ing. Matthias Kind **Dr.-Ing. Thomas Wetzel**

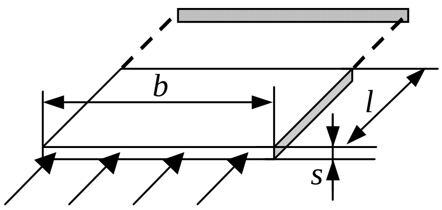
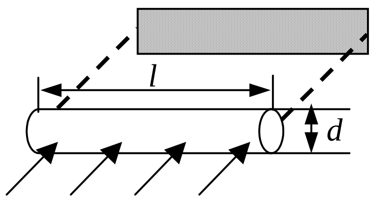
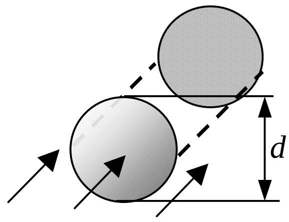
Wärmeübertragung I

Lösung zur 11.Übung (Wärmeübergang bei Konvektion II)

Überströmte Einzelkörper

Ein überströmter Einzelkörper ist dadurch gekennzeichnet, dass das strömende Medium sehr ausgedehnt ist und in hinreichender Entfernung von diesem Körper völlig ungestört strömt. Die Strömung um den Einzelkörper kann von außen aufgezwungen werden (z.B. Einzelkörper im Windkanal, oder frei fallend) oder durch Dichteunterschiede als Folge von Temperaturunterschieden entstehen (z.B. Heizkörper). Im ersten Fall spricht man von erzwungener Konvektion, im letzteren von freier Konvektion.

Als Charakteristik des Strömungszustandes bei erzwungener Konvektion wird auch die *Re*-Zahl verwendet: $Re_{erzw} = \bar{u} \cdot L_c / \nu$. Die charakteristische Länge, die in alle Kennzahlen (auch in *Nu*) eingeht, berechnet sich wie folgt: $L_c = A/U$ mit *A* – Wärmeübertragungsfläche und *U* – Umfang der Projektionsfläche in Strömungsrichtung. Damit ergibt sich für:

Platte	Zylinder	Kugel
		
$A = 2bl; \quad U = 2b + 2s \approx 2b$	$A = \pi dl; \quad U = 2d + 2l \approx 2l$	$A = \pi d^2; \quad U = \pi d$
$L_c = A/U = 2bl/2b = l$	$L_c = A/U = \pi dl/2l = \pi d/2$	$L_c = A/U = \pi d^2/\pi d = d$

Bei freier Konvektion ist die *Re*-Zahl: $Re_{frei} = \sqrt{0{,}4 \cdot Gr}$ mit $Gr = \frac{g \cdot L_c^3}{\nu^2} \cdot \frac{\rho_\infty - \rho_W}{\rho_\infty}$

L_c wird wieder mit *A*/*U* berechnet, die Strömungsrichtung ist aber die von freier Konvektion (daher andere L_c möglich!). Bei Überlagerung von freier und erzwungener Konvektion wird für die Berechnung der *Nu*-Zahl eine resultierende *Re*-Zahl benutzt: $Re_{res} = \sqrt{Re_{erzw}^2 + Re_{frei}^2}$

Die Formel zur Berechnung des Wärmeübergangs (für alle Strömungszustände!) ist:

$$\boxed{Nu = Nu_{\min} + \sqrt{Nu_{lam}^2 + Nu_{turb}^2}}$$

mit $Nu_{\min} =$ 0 für Platte; 0,3 für Zylinder; 2 für Kugel

$$Nu_{lam} = \left(\frac{2}{1+22\cdot Pr}\right)^{1/6}\sqrt{Re_{res}\cdot Pr}$$

$$Nu_{turb} = \frac{0{,}037\cdot Re_{res}^{0,8}\cdot Pr}{1+2{,}443\cdot Re_{res}^{-0,1}\left(Pr^{2/3}-1\right)}$$

Sonderfall: Schleichende Strömung. Wenn Re < 10 muss zunächst überprüft werden, ob die Formel für schleichende Strömung nicht einen größeren Wert für *Nu* liefert:

$Nu \geq 0{,}75\cdot\sqrt[3]{Pe}$ für Zylinder; $Nu \geq 0{,}99\cdot\sqrt[3]{Pe}$ für Kugel

Lösung 1. Aufgabe WuS1

a) Wärmeübergangskoeffizient α_a: überströmter Zylinder $\Rightarrow$ $Nu = Nu_{min} + \sqrt{Nu_{lam}^2 + Nu_{turb}^2}$

$$Re = \frac{u \cdot L_c}{\nu} = \frac{u_\infty \pi (d_a + 2s_{ISO})}{2\nu_L} = \frac{1 \cdot \pi \cdot (0{,}34 + 0{,}04)}{2 \cdot 1{,}53 \cdot 10^{-5}} = 39013$$ $Re_{res} = Re$, da fr. Konv. vernachl.

$$Nu_{lam} = \left(\frac{2}{1 + 22\,Pr_L}\right)^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt{Re\,Pr_L} = \left(\frac{2}{1 + 22 \cdot 0{,}71}\right)^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt{39013 \cdot 0{,}71} = 116{,}94$$ (geg: $Pr_L = 0{,}71$)

$$Nu_{turb} = \frac{0{,}037 \cdot Re^{0{,}8} \cdot Pr_L}{1 + 2{,}443 \cdot Re^{-0{,}1} \cdot (Pr^{2/3} - 1)} = 149{,}65 \Rightarrow Nu = 0{,}3 + \sqrt{116{,}94^2 + 149{,}65^2} = 190{,}22$$

$$\underline{\underline{\alpha_a}} = \frac{Nu \cdot \lambda_L}{L_c} = \frac{Nu \cdot \lambda_L \cdot 2}{\pi \cdot (d_a + 2s_{ISO})} = \frac{190{,}22 \cdot 0{,}0257 \cdot 2}{\pi \cdot 0{,}38} = \underline{\underline{8{,}19\ W/(m^2K)}}$$

b) Wärmedurchgangskoeffizient k: $\frac{1}{k \cdot A_{ISO,a}} = \frac{1}{\alpha_i \cdot A_i} + \frac{1}{\alpha_a \cdot A_{ISO,a}} + \frac{s_R}{\lambda_R \cdot A_{m,R}} + \frac{s_{ISO}}{\lambda_{ISO} \cdot A_{m,ISO}}$

$A_i = \pi d_i \cdot L = \pi \cdot 0{,}3 \cdot 20 = 18{,}85\ m^2$; $A_{ISO,a} = \pi (d_a + 2s_{ISO}) \cdot L = \pi \cdot 0{,}38 \cdot 20 = 23{,}88\ m^2$

$$d_{m,R} = \frac{0{,}34 - 0{,}3}{\ln(0{,}34/0{,}3)} = 0{,}320\ m \Rightarrow A_{m,R} = \pi d_{m,R} \cdot L = \pi \cdot 0{,}320 \cdot 20 = 20{,}08\ m^2$$

$$d_{m,ISO} = 0{,}360\ m \Rightarrow A_{m,ISO} = \pi d_{m,ISO} \cdot L = \pi \cdot 0{,}360 \cdot 20 = 22{,}62\ m^2$$

$$\frac{1}{k \cdot A_{ISO,a}} = \frac{1}{14{,}65 \cdot 18{,}85} + \frac{1}{8{,}19 \cdot 23{,}88} + \frac{0{,}02}{17 \cdot 20{,}08} + \frac{0{,}02}{0{,}04 \cdot 22{,}62} \Rightarrow k = \underline{\underline{1{,}355\ W/(m^2K)}}$$

c) $T_{W,aus}$: aus Bilanz und Kinetik: $\dot{Q} = \dot{M}_W \cdot c_{p,W} (T_{W,ein} - T_{W,aus}) = k \cdot A_{ISO,a} \cdot \Delta T_{LM}$

$$\Delta T_{LM} = \frac{(T_{W,ein} - T_U) - (T_{W,aus} - T_U)}{\ln\left(\frac{T_{W,ein} - T_U}{T_{W,aus} - T_U}\right)} \Rightarrow \dot{M}_W \cdot c_{p,W} = \frac{k \cdot A_{ISO,a}}{\ln\left(\frac{T_{W,ein} - T_U}{T_{W,aus} - T_U}\right)} \Rightarrow \ln\left(\frac{T_{W,aus} - T_U}{T_{W,ein} - T_U}\right) = -\frac{k \cdot A_{ISO,a}}{\dot{M}_W \cdot c_{p,W}}$$

$$\underline{\underline{T_{W,aus}}} = T_U + (T_{W,ein} - T_U) \cdot \exp\left(-\frac{k \cdot A_{ISO,a}}{\dot{M}_W \cdot c_{p,W}}\right) = 20 + (75 - 20) \cdot \exp\left(-\frac{1{,}355 \cdot 23{,}88 \cdot 3600}{500 \cdot 4190}\right) = \underline{\underline{72{,}03°C}}$$

Lösung 2. Aufgabe

Wärmeverluste $\dot{Q} = \alpha_a \cdot A \cdot (T_O - T_L)$; $\quad \dot{Q}/L = \alpha_a \cdot (A/L) \cdot (T_O - T_L) = \alpha_a \cdot \pi d_a \cdot (T_O - T_L)$

Berechnung von α_a: überströmter Zylinder. Charakteristische Länge $L_c = \pi d_a / 2 = 0{,}393$ m

$$Re_{res} = \sqrt{Re_{erzw}^2 + Re_{frei}^2} \quad \text{mit} \quad Re_{erzw} = \frac{\bar{u} \cdot L_c}{\nu} \quad \text{und} \quad Re_{frei} = \sqrt{0{,}4 \cdot Gr}$$

$$Gr = \frac{gL_c^3}{\nu^2} \cdot \frac{\rho_\infty - \rho_W}{\rho_\infty} = \frac{gL_c^3}{\nu^2} \cdot \frac{1/T_L - 1/T_O}{1/T_L} = \frac{gL_c^3}{\nu^2} \cdot \frac{T_O - T_L}{T_O} = 4{,}04 \cdot 10^8; \quad Re_{frei} = 12713{,}7$$

$\bar{u}$ [m/s]	Re_{erzw}	Re_{res}	Nu_{lam} *)	Nu_{turb} **)	Nu ***)	α_a [W/m²K]	$\dot{Q}/L$ [W/m]
0	0,0	12713,7	66,11	61,91	90,87	6,47	406,79
1	21833,3	25265,2	93,19	105,41	141,00	10,05	631,18
2	43666,7	45479,8	125,03	166,41	208,45	14,85	933,12
5	109166,7	109904,5	194,36	330,82	383,99	27,36	1718,95
10	218333,3	218703,2	274,17	566,08	629,29	44,83	2817,04
20	436666,7	436851,7	387,50	972,54	1047,20	74,61	4687,85

*) $\quad Nu_{lam} = \left(\frac{2}{1 + 22 \cdot Pr}\right)^{1/6} \sqrt{Re_{res} \cdot Pr}$ $\qquad$ **) $\quad Nu_{turb} = \frac{0{,}037 \cdot Re_{res}^{0,8} \cdot Pr}{1 + 2{,}443 \cdot Re_{res}^{-0,1}\left(Pr^{2/3} - 1\right)}$

***) $Nu = Nu_{\min} + \sqrt{Nu_{lam}^2 + Nu_{turb}^2}$ mit $Nu_{\min} = 0{,}3$ für Zylinder

Vorsicht: Der zusätzliche Wärmeverlust durch Strahlung kann (bei z.B. $\varepsilon = 0{,}8$; $T_m = 323$ K) etwa so viel wie der durch freie Konvektion betragen!