Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität · gegründet 1825

Institut für
Thermische Verfahrenstechnik

Prof. Dr.-Ing. Matthias Kind **Dr.-Ing. Thomas Wetzel**

Wärmeübertragung I

Lösung zur 10. Übung (Wärmeübergang bei Konvektion I)

Durchströmte Kanäle

Bei einer Strömung durch Kanäle (z.B. Rohr oder ebener Spalt) wird der Wärmeübergang gegenüber dem Wärmeübergang bei Wärmeleitung aufgrund der Konvektion beschleunigt. Da der Wärmeübergang stark vom Strömungszustand abhängt, muss zunächst festgestellt werden, ob die Strömung laminar oder turbulent ist. Dafür berechnet man die Reynolds Zahl: $Re = \bar{u} \cdot d_h / \nu$. Hier ist $\bar{u}$ die mittlere Geschwindigkeit der Strömung, ν die kinematische Viskosität.

Als charakteristische Länge gilt bei allen Kennzahlen (*Re*, *Nu*) der s.g. hydraulischer Durchmesser d_h, der wie folgt berechnet wird: $d_h = 4f/U$, mit f –Strömungsquerschnitt und U – benetzter Umfang der Strömung. So ergibt sich für ein durchströmtes Rohr mit kreisförmigem Querschnitt: $d_h = 4 \cdot \pi \cdot d^2 / (4 \cdot \pi \cdot d) = d$, also der Durchmesser des Rohres, und für einen ebenen Spalt $d_h = 4 \cdot b \cdot s / (2b + 2s) \approx 2s$, also zwei Spaltweiten (wenn $b >> s$ ist).

Mit diesen charakteristischen Längen wird *Re* berechnet. Falls diese kleiner 2300 ist, wird die Formel für die *Nu*-Zahl in laminarer Strömung verwendet. Falls *Re* größer 10000 ist, gilt die Gnielinski-Formel für die *Nu*-Zahl in turbulenter Strömung. Wenn die *Re*-Zahl zwischen den beiden Grenzwerten liegt, wird die *Nu*-Zahl durch lineare Interpolation zwischen der *Nu*–Zahl für laminare Strömung bei $Re = 2300$ und der *Nu*–Zahl für turbulente Strömung bei $Re = 10000$ berechnet.

Laminare Strömung $Re < 2300$: $\boxed{Nu = \sqrt[3]{Nu_1^3 + b^3 + (Nu_2 - b)^3 + Nu_3^3}}$

Rohr	$b = 0{,}7$	$Nu_1 = 3{,}66$	$Nu_2 = 1{,}615 \cdot \sqrt[3]{Gz}$	$Nu_3 = \sqrt[6]{\frac{2}{1 + 22 \cdot Pr}} \cdot \sqrt{Gz}$
Spalt	$b = 0$	$Nu_1 = 7{,}54$	$Nu_2 = 1{,}849 \cdot \sqrt[3]{Gz}$	

$Gz = Re \cdot Pr \cdot d_h / L$ – Graetz Zahl (L – Länge des Kanals); Pr – Prandtl Zahl (Stoffeigenschaft)

Turbulente Strömung $Re > 10000$ (Gnielinski-Formel):

$$\boxed{Nu = \frac{(\xi/8) \cdot Re \cdot Pr}{1 + 12{,}7 (\xi/8)^{1/2} \left(Pr^{2/3} - 1\right)} \cdot \left(1 + \left(\frac{d_h}{L}\right)^{2/3}\right)} \quad \text{mit} \quad \boxed{\xi = (1{,}8 \cdot \lg Re - 1{,}5)^{-2}}$$

Übergangsbereich $2300 < Re < 10000$: lineare Interpolation zwischen $Nu_{lam}(Re = 2300)$ und $Nu_{turb}(Re = 10000)$: $\boxed{Nu = (1 - \gamma) \cdot Nu_{lam}(Re = 2300) + \gamma \cdot Nu_{turb}(Re = 10^4)}$ mit $\boxed{\gamma = \frac{Re - 2300}{10^4 - 2300}}$

Lösung 1. Aufgabe.

Freier Querschnitt Luft: $F_F = F - F_L = 0{,}0064 - 0{,}0016 = 0{,}0048$ m²

mit F - Querschnitt gesamt, FL - Querschnitt Lamellen

Geschwindigkeit der Luft: $u = \dot{V}_L / F_F = 0{,}01528/0{,}0048 = 3{,}183$ m/s

Hydraulischer Durchmesser Kanal (mit a ≈ 0,0015 m – Abstand zwischen den Lamellen):

$$d_h = \frac{4 \cdot \text{Querschnitt}}{\text{Umfang}} = \frac{4 \cdot F_F}{39 \cdot (2a + 2B)} = \frac{4 \cdot 0{,}0048}{39 \cdot (2 \cdot 0{,}0015 + 2 \cdot 0{,}08)} = 0{,}0030 \text{ m}$$

$$Re = \frac{u \cdot d_h}{\nu_L} = 625{,}97$$

=> Strömung zwischen Lamellen laminar!

Laminare Strömung in einem ebenen Spalt: $Nu = \sqrt[3]{Nu_1^3 + b^3 + (Nu_2 - b)^3 + Nu_3^3}$

b = 0; Nu1 = 7,54

$$Nu_2 = 1{,}849 \cdot \sqrt[3]{Re \cdot Pr \cdot \frac{d_h}{L}} = 4{,}95$$

$$Nu_3 = \left(\frac{2}{1 + 22 \cdot Pr}\right)^{1/6} \cdot \sqrt{Re \cdot Pr \cdot \frac{d_h}{L}} = 3{,}08$$

Nu = 8,34; → $\alpha = \dfrac{Nu \cdot \lambda_L}{d_h} = 71{,}38 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K)}$

Oberfläche der Lamellen: $A = 39 \cdot 2 \cdot L \cdot B = 39 \cdot 2 \cdot 0{,}07 \cdot 0{,}08 = 0{,}4368$ m²

Maximaler Wärmestrom von Lamellen an die Luft:

$$\dot{Q}_{L,\max} = A \cdot \alpha \cdot (T_{Lamellen} - T_U) = A \cdot \alpha \cdot (T_S - T_U) = 311{,}8 \text{ W}$$

Lösung 2. Aufgabe.

Bilanz um die gesamte Apparateanordnung: $\dot{M} \cdot c_P \cdot (T_{aus} - T_{ein}) = k \cdot A \cdot \Delta T_{LM}$

$$\frac{1}{k \cdot A} = \frac{1}{\alpha_a \cdot A_a} + \frac{s_R}{\lambda_R \cdot A_{m,R}} + \frac{1}{\alpha_i \cdot A_i} \approx \frac{1}{\alpha_i \cdot A_i} \quad \text{da} \quad \frac{1}{\alpha_a \cdot A_a} + \frac{s_R}{\lambda_R \cdot A_{m,R}} \approx 0$$

(Wärmeübergangswiderstände auf der Außenseite und in der Wand sind zu vernachlässigen)

$$\Delta T_{LM} = \frac{\Delta T_{ein} - \Delta T_{aus}}{\ln(\Delta T_{ein} / \Delta T_{aus})} = \frac{(T_O - T_{ein}) - (T_O - T_{aus})}{\ln((T_O - T_{ein})/(T_O - T_{aus}))} = \frac{T_{aus} - T_{ein}}{\ln((T_O - T_{ein})/(T_O - T_{aus}))}$$

damit folgt aus der Bilanz: $\dot{M} \cdot c_P \cdot \ln\frac{T_O - T_{ein}}{T_O - T_{aus}} = \alpha_i A_i$; $\quad T_{aus} = T_O - (T_O - T_{ein}) \cdot \exp\left(-\frac{\alpha_i \cdot A_i}{\dot{M} \cdot c_P}\right)$

Berechnung von α_i (in einem durchströmten Rohr):

Volumenstrom $\dot{V} = \dot{M} / \rho = 2/879 = 0{,}0022753$ m³/s

Anordnung 1

Innendurchmesser $d_i = 0{,}008$ m; $z = 40$

Querschnitt $f = z \cdot \pi d_i^2 / 4 = 2{,}011 \cdot 10^{-3}$ m²

Geschwindigkeit: $\bar{u} = \dot{V} / f = 1{,}132$ m/s

$$Re = \frac{\bar{u} \cdot d_h}{\nu} = \frac{1{,}132 \cdot 0{,}008}{0{,}74 \cdot 10^{-6}} = 12\,237{,}8$$

Strömungszustand: turbulent ($Re > 10\,000$)

$$Nu = \frac{(\xi/8) \cdot Re \cdot Pr}{1 + 12{,}7(\xi/8)^{1/2}(Pr^{2/3} - 1)} \cdot \left(1 + \left(\frac{d_i}{L}\right)^{2/3}\right)$$

$$\xi = (1{,}8 \cdot \lg Re - 1{,}5)^{-2} = 0{,}02914$$

$Pr = 7{,}4$; $L = 1$ m

$$Nu = 109{,}11; \quad \alpha_i = \frac{Nu \cdot \lambda}{d_i} = 2086{,}71 \, \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$

$A_i = 2 \cdot z \cdot \pi d_i L = 2{,}01$ m²

$T_{aus} = 34{,}5$ °C (ausreichend!)

Trotz der viel kleineren Übertragungsfläche (Faktor 10!) der Anordnung 1 ist nur diese Anordnung dazu geeignet, die gewünschte Austritttemperatur zu erreichen.

Anordnung 2

Innendurchmesser $d_i = 0{,}02$ m; $z = 85$

Querschnitt $f = z \cdot \pi d_i^2 / 4 = 2{,}670 \cdot 10^{-2}$ m²

Geschwindigkeit: $\bar{u} = \dot{V} / f = 0{,}085$ m/s

$$Re = \frac{\bar{u} \cdot d_h}{\nu} = \frac{0{,}085 \cdot 0{,}02}{0{,}74 \cdot 10^{-6}} = 2\,297{,}3$$

Strömungszustand: laminar ($Re < 2300$)

$$Nu = \sqrt[3]{Nu_1^3 + b^3 + (Nu_2 - b)^3 + Nu_3^3}$$

$b = 0{,}7$ $\quad Nu_1 = 3{,}66$ $\quad L = 1{,}25$ m

$$Nu_2 = 1{,}615 \cdot \sqrt[3]{Gz} = 10{,}46$$

mit $Gz = Re \cdot Pr \cdot \frac{d_i}{L} = 271{,}9$

und $Pr = \frac{\nu \cdot \rho \cdot c_P}{\lambda} = 7{,}4$

$$Nu_3 = \sqrt[6]{\frac{2}{1 + 22 \cdot Pr}} \cdot \sqrt{Gz} = 7{,}91$$

$$Nu = 11{,}38; \quad \alpha_i = \frac{Nu \cdot \lambda}{d_i} = 87{,}06 \, \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$

$A_i = 3 \cdot z \cdot \pi d_i L = 20{,}03$ m²

$T_{aus} = 23{,}8$ °C (nicht ausreichend!)