Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität · gegründet 1825
Institut für
Thermische Verfahrenstechnik

Prof. Dr.-Ing. Matthias Kind **Dr.-Ing. Thomas Wetzel**

Wärmeübertragung I

Lösung zur 9. Übung (Instationäre Wärmeleitung)

Instationäre Wärmeleitung ist dadurch gekennzeichnet, dass die Temperaturprofile im Körper sich mit der Zeit verändern. Ein solcher Fall liegt z.B. bei einer sprunghaften Änderung der Umgebungstemperatur vor. Zu Beginn erwärmen oder kühlen sich zunächst die äußeren Schichten des Körpers ab, später folgt dann auch die Temperatur in der Mitte. Wenn von <u>einer</u> Temperatur des Körpers gesprochen wird, so ist die <u>kalorische Mitteltemperatur</u> gemeint, die man als integralen Mittelwert über das gesamte Volumen berechnet:

$$\bar{T}(t) = \frac{1}{V_\Sigma} \cdot \int_0^{V_\Sigma} T(V,t) \cdot dV$$

Diese kalorische Mitteltemperatur ergibt sich aus Bilanz und Kinetik als Funktion der Zeit:

$$M \cdot c_P \cdot \frac{d\bar{T}(t)}{dt} = -\bar{k} \cdot A \cdot \left(\bar{T}(t) - T_\infty\right) \rightarrow \boxed{\bar{T}(t) = T_\infty + \left(T_A - T_\infty\right) \cdot \exp\left(-NTU_i\right)}$$

mit T_A – Anfangstemperatur des Körpers.

Die „Anzahl der Übertragungseinheiten“ $NTU_i = \frac{\bar{k} \cdot A}{M \cdot c_P} \cdot t$; mit $\bar{k} = \left(1/\alpha_a + 1/\overline{\alpha_i}\right)^{-1}$ als zeitlichem Mittelwert (von 0 bis t) des Wärmedurchgangskoeffizienten. Der äußere Wärmeübergangskoeffizient α_a ist üblicherweise konstant (kann auch anders sein, Aufgabenstellung beachten!), und der innere Wärmeübergangskoeffizient α_i ist eine Funktion der Zeit. Also steht in der Formel für $\bar{k}$ der zeitliche Mittelwert $\overline{\alpha_i}$ (von 0 bis t). Es ist in den meisten Fällen einfacher, NTU_i in dimensionsloser Form zu berechnen:

$\boxed{NTU_i = \frac{a^* \cdot Fo}{1/Bi + 1/Nu_i}}$ mit $\boxed{a^* = \frac{A \cdot L_c}{V} = 2;\; 4;\; 6}$ für Platte; Zylinder; Kugel. Hier ist Nu_i – zeitlicher Mittelwert der Nu-Zahl: $Nu_i = \frac{\overline{\alpha_i} \cdot L_c}{\lambda_i}$; $\boxed{Bi = \frac{\alpha_a \cdot L_c}{\lambda_i}; \quad Fo = \frac{\lambda_i \cdot t}{\rho \cdot c_P \cdot L_c^2}}$

Charakteristische Länge L_c: für Platte – Plattendicke; für Zylinder und Kugel – Durchmesser. Wird eine Platte der Dicke s nur einseitig erwärmt (bzw. abgekühlt), so ist die charakteristische Länge $L_c = 2s$! Für die Berechnung der zeitlich gemittelten Nu-Zahl wird die folgende Formel benutzt: $\boxed{Nu_i = \sqrt{Nu_{i\infty}^2 - b^2 + (Nu_{i0} + b)^2}}$

Diese Formel stellt eine Überlagerung der Kurzzeit- und Langzeitasymptoten für Nu-Zahl dar:

<u>$t \rightarrow 0$:</u> $\boxed{Nu_{i0} = \frac{\sqrt{\pi} + 10 \cdot Bi \cdot \sqrt{Fo}}{1 + 5 \cdot Bi \cdot \sqrt{\pi \cdot Fo}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Fo}}}$; <u>$t \rightarrow \infty$:</u> $\boxed{Nu_{i\infty} = \frac{4 + a^* + Bi}{1 + Bi / Nu_{\infty\infty}}}$; $b = 0{,}4$

$Nu_{\infty\infty} = \pi^2/2;\ 5{,}78;\ 2\pi^2/3$ für Platte; Zylinder; Kugel.

Des Weiteren kann man die Formel vereinfachen, indem man einen der Wärmeübergangwiderstände (innen oder außen) gegenüber dem anderen vernachlässigt (nur mit Begründung!). Das Kriterium dafür ist die Biot-Zahl. Angenommen z.B. $\alpha_a >> \lambda_i/L_c$, dann liegt der Wärmeübergangswiderstand hauptsächlich an der Innenseite der Oberfläche. Die Biot-Zahl ist in diesem Fall sehr groß ($Bi >> Nu_i$, $Bi \to \infty$), also kann man in den Formeln für $Nu_{i\infty}$ und Nu_{i0} die Terme ohne Bi gegenüber den Termen mit Bi vernachlässigen:

Kurzzeitasymptote $\underline{Bi \to \infty}$: $$Nu_{i0} = \frac{\sqrt{\pi} + 10Bi\sqrt{Fo}}{1 + 5Bi\sqrt{\pi \cdot Fo}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Fo}} \approx \frac{10 \cdot Bi\sqrt{Fo}}{5Bi\sqrt{\pi \cdot Fo}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Fo}} \approx \frac{2}{\sqrt{\pi \cdot Fo}}$$

Langzeitasymptote $\underline{Bi \to \infty}$: $$Nu_{i\infty} = \frac{4 + a^* + Bi}{1 + Bi/Nu_{\infty\infty}} \approx \frac{Bi}{Bi/Nu_{\infty\infty}} \approx Nu_{\infty\infty}$$

Die NTU_i wird in diesem Fall: $$NTU_i = \frac{a^* \cdot Fo}{1/Bi + 1/Nu_i} \approx a^* \cdot Fo \cdot Nu_i$$

Wenn $\alpha_a << \lambda_i/L_c$, liegt der Wärmeübergangswiderstand hauptsächlich an der Außenseite der Oberfläche und die Biot Zahl ist sehr klein ($Bi << Nu_i$, $Bi \to 0$). In diesem Fall bekommt man, nachdem man die Terme mit Bi gegenüber den Termen ohne Bi vernachlässigt:

Kurzzeitasymptote $\underline{Bi \to 0}$: $$Nu_{i0} = \frac{\sqrt{\pi} + 10Bi\sqrt{Fo}}{1 + 5Bi\sqrt{\pi \cdot Fo}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Fo}} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{Fo}}$$

Langzeitasymptote $\underline{Bi \to 0}$: $$Nu_{i\infty} = \frac{4 + a^* + Bi}{1 + Bi/Nu_{\infty\infty}} \approx 4 + a^* = 6;\ 8;\ 10 \quad \text{für P; Z; K}$$

Bei der Berechnung der <u>Oberflächentemperatur</u> des Körpers (Index W = Wand), wird an der Stelle des Mittelwerts der momentane Wert der Nu-Zahl Nu_{it} benutzt:

$$\boxed{T_W = T_\infty + \frac{\left(\overline{T}(t) - T_\infty\right)}{1 + Bi/Nu_{it}}};\quad \boxed{Nu_{it} = \sqrt{Nu_{i\infty}^2 - b_t^2 + (Nu_{ito} + b_t)^2}};\quad b_t = -0{,}4$$

$$\boxed{Nu_{i\infty} = \frac{4 + a^* + Bi}{1 + Bi/Nu_{\infty\infty}}}\quad \boxed{Nu_{ito} = \frac{2{,}3 \cdot \sqrt{\pi} + 2 \cdot Bi \cdot \sqrt{Fo}}{2{,}3 + Bi \cdot \sqrt{\pi \cdot Fo}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{Fo}}}$$

Bei der Berechnung der Temperatur in der Mitte des Körpers wird die s.g. Totzeit Δt berechnet, die zeigt, inwieweit die Temperatur in der Mitte gegenüber der kalorischen Mitteltemperatur nachhinkt: $\boxed{T_M(t) = \overline{T}(t - \Delta t)}$. Die Totzeit Δt berechnet man wie folgt:

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta Fo \cdot L_c^2}{\kappa}};\quad \boxed{\Delta Fo = \left(\frac{1}{\Delta Fo_\infty^m} + \frac{1}{Fo^m}\right)^{-1/m}}\quad \text{mit} \quad m \approx 4;\quad \kappa = \frac{\lambda_i}{\rho \cdot c_P}$$

$$\boxed{\frac{1}{\Delta Fo_\infty} = 16 + \frac{4 \cdot a^* \cdot (12 + a^* + 2 \cdot Bi)}{12 + a^* + Bi \cdot (2{,}71 + 0{,}015 \cdot a^*)}}$$

Lösung Aufgabe 1.

a) Instationäre Abkühlung eines Zylinders: $\overline{T}(t) = T_\infty + (T_A - T_\infty)\cdot \exp(-NTU_i)$

$$NTU_i = \frac{a^* \cdot Fo}{1/Bi + 1/Nu_i}$$

$$\frac{1}{\alpha_a} \to 0; \quad \alpha_a \to \infty; \quad Bi \to \infty; \quad \frac{1}{Bi} \to 0$$

$NTU_i = a^* \cdot Fo \cdot Nu_i$; $a^* = 4$; $L_c = d = 0{,}06$ m

$$Fo = \frac{\lambda_i t}{\rho c_P L_c^2} = \frac{0{,}59 \cdot 480}{1000 \cdot 4{,}2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}06^2} = 0{,}01873$$

Oder alternativ:

$$NTU_i = \frac{\overline{k} \cdot A}{M \cdot c_P} \cdot t = \frac{4 \cdot \overline{k}}{\rho \cdot d \cdot c_P} \cdot t$$

$$\overline{k} = \left(\frac{1}{\alpha_a} + \frac{1}{\overline{\alpha_i}}\right)^{-1}; \quad \frac{1}{\alpha_a} \to 0 \rightarrow \overline{k} \approx \overline{\alpha_i}$$

$\overline{\alpha_i} = \frac{Nu_i \cdot \lambda_i}{L_c}$; $L_c = d = 0{,}06$ m

Berechnung von Nu_i: $Nu_i = \sqrt{Nu_{i\infty}^2 - b^2 + (Nu_{i0} + b)^2}$; $b = 0{,}4$

Kurzzeitasymptote $\underline{Bi \to \infty}$: $Nu_{i0} = \frac{\sqrt{\pi} + 10 Bi \sqrt{Fo}}{1 + 5 Bi \sqrt{\pi \cdot Fo}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Fo}} \approx \frac{10 \cdot Bi \sqrt{Fo}}{5 Bi \sqrt{\pi \cdot Fo}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Fo}} \approx \frac{2}{\sqrt{\pi \cdot Fo}}$

Langzeitasymptote $\underline{Bi \to \infty}$: $Nu_{i\infty} = \frac{4 + a^* + Bi}{1 + Bi/Nu_{\infty\infty}} \approx \frac{Bi}{Bi/Nu_{\infty\infty}} \approx Nu_{\infty\infty} = 5{,}78$

$$Nu_i = \sqrt{Nu_{\infty\infty}^2 - b^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{\pi \cdot Fo}} + b\right)^2} = \sqrt{5{,}78^2 - 0{,}4^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{\pi \cdot 0{,}01873}} + 0{,}4\right)^2} = 10{,}39$$

$NTU_i = a^* \cdot Fo \cdot Nu_i = 4 \cdot 0{,}01873 \cdot 10{,}39 = 0{,}7785$

$\overline{T}(t) = 12 + (30 - 12)\cdot \exp(-0{,}7785) = 20{,}3\ °C$

$\overline{\alpha_i} = 102{,}17\ W/m^2K \quad NTU_i = 0{,}7784$

$\overline{T}(t) = 20{,}3\ °C$

b) Nach jedem Schwenken ist $\overline{T}(t_i)$ die neue T_A.

Fourier-Zahl für $t = 2$ min: $Fo_1 = Fo_2 = Fo_3 = Fo_4 = \frac{\lambda_i t}{\rho c_P L_c^2} = \frac{0{,}59 \cdot 120}{1000 \cdot 4200 \cdot 0{,}06^2} = 0{,}00468$

$$Nu_i = \sqrt{Nu_{\infty\infty}^2 - b^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{\pi \cdot Fo}} + b\right)^2} = \sqrt{5{,}78^2 - 0{,}4^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{\pi \cdot 0{,}00468}} + 0{,}4\right)^2} = 17{,}85$$

$NTU_i = a^* \cdot Fo \cdot Nu_i = 4 \cdot 0{,}00468 \cdot 17{,}85 = 0{,}3342$ $\quad \underline{\overline{T}(t) = 12 + (T_A - 12)\cdot \exp(-0{,}3342):}$

i = Nr	t_i	T_A	$\overline{T}(t_i)$
1	2 min	30 °C	24,89 °C
2	4 min	24,89 °C	21,22 °C
3	6 min	21,22 °C	18,60 °C
4	8 min	18,60 °C	$\underline{\underline{16{,}73\ °C}}$

← nach t = 8 min und 3 mal schwenken

Lösung Aufgabe 2.

a) Abkühlzeit bis $\overline{T} = 40°C$: $\overline{T}(t) = T_\infty + (T_A - T_\infty)\cdot \exp(-NTU_i)$

$$NTU_i = \ln\frac{T_A - T_\infty}{\overline{T} - T_\infty} = \ln\frac{80-20}{40-20} = 1{,}1; \quad NTU_i = \frac{a^*\cdot Fo}{1/Bi + 1/Nu_i}; \quad Fo = \frac{\lambda_i \cdot t}{\rho\cdot c_P \cdot L_c^2}; \quad \text{daraus } t.$$

$L_c = 2s = 0{,}02$ m; $Bi = \alpha_a \cdot L_c / \lambda_i = 25\cdot 0{,}02/0{,}5 = 1$; $Nu_i = 4 + a^* = 4 + 2 = 6$

$$t_E = \frac{\rho c_P L_c^2 \cdot (1/Bi + 1/Nu_i)\cdot NTU_i}{a^*\cdot \lambda_i} = \frac{2000\cdot 1000\cdot 0{,}02^2\cdot (1/1 + 1/6)\cdot 1{,}1}{2\cdot 0{,}5} = 1025{,}4\ s$$

b) Oberfläche: $T_O = T_\infty + \dfrac{(\overline{T}(t_E) - T_\infty)}{1 + Bi/Nu_{it}}$; $Nu_{it} = \sqrt{Nu_{i\infty}^2 - b_t^2 + (Nu_{ito} + b_t)^2}$; $b_t = -0{,}4$;

$$Nu_{i\infty} = \frac{4 + a^* + Bi}{1 + Bi/Nu_{\infty\infty}} = 5{,}82 \quad (\text{mit } Nu_{\infty\infty} = \pi^2/2 \text{ für die Platte})$$

$$Fo(t_E) = \frac{\lambda_i\cdot t_E}{\rho\cdot c_P\cdot L_c^2} = 0{,}6409; \qquad Nu_{ito} = \frac{2{,}3\cdot\sqrt{\pi} + 2\cdot Bi\cdot\sqrt{Fo}}{2{,}3 + Bi\cdot\sqrt{\pi\cdot Fo}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{Fo}} = 0{,}95 \quad (\text{mit } Bi = 1)$$

$$Nu_{it} = \sqrt{5{,}82^2 - (-0{,}4)^2 + (0{,}95 - 0{,}4)^2} = 5{,}83; \qquad T_O(t_E) = 20 + \frac{(40-20)}{1 + B1/5{,}83} = 37{,}1\ °C$$

Temperatur an der Unterseite (Totzeit Δt): $T_U(t_E) = \overline{T}(t_E - \Delta t) = \overline{T}(Fo(t_E) - \Delta Fo)$

$$\Delta t = \Delta Fo\cdot L_c^2\cdot\rho\cdot c_P/\lambda_i; \qquad \Delta Fo = \left(1/\Delta Fo_\infty^m + 1/Fo^m\right)^{-1/m} \quad \text{mit} \quad m \approx 4$$

$$\frac{1}{\Delta Fo_\infty} = 16 + \frac{4\cdot a^*\cdot(12 + a^* + 2\cdot Bi)}{12 + a^* + Bi\cdot(2{,}71 + 0{,}015\cdot a^*)} = 16 + \frac{4\cdot 2\cdot(12 + 2 + 2\cdot 1)}{12 + 2 + 1\cdot(2{,}71 + 0{,}015\cdot 2)} = 23{,}65$$

$$\Delta Fo = (23{,}65^4 + 1/0{,}6409^4)^{-1/4} = 0{,}0423; \qquad \Delta t = 0{,}0423\cdot 0{,}02^2\cdot 2000\cdot 1000/0{,}5 = 67{,}7\ s$$

$$NTU_i(Fo(t_E) - \Delta Fo) = \frac{a^*\cdot(Fo(t_E) - \Delta Fo)}{1/Bi + 1/Nu_i} = \frac{2\cdot(0{,}6409 - 0{,}0423)}{1/1 + 1/6} = 1{,}03$$

$$T_U(t_E) = 20 + (80-20)\cdot\exp(-1{,}03) = 41{,}4\ °C$$

somit $\Delta T(t_E) = T_U(t_E) - T_O(t_E) = 41{,}4 - 37{,}1 = 4{,}3\ °C$

c) Temperaturverlauf