Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität · gegründet 1825

Institut für
Thermische Verfahrenstechnik

Prof. Dr.-Ing. Matthias Kind **Dr.-Ing. Thomas Wetzel**

Wärmeübertragung I

Lösung zur 8. Übung (Stationäre Wärmeleitung)

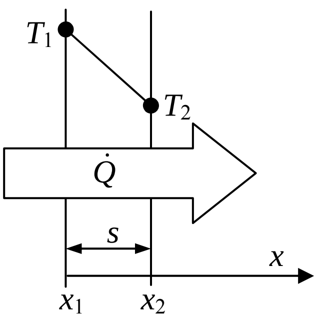
Einleitung

Ausgangspunkt für die Berechnung des Wärmeübergangs durch stationäre Wärmeleitung in ruhenden Medien ist das Fourier-Gesetz der Wärmeleitung:

$$\boxed{\dot{Q} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{\partial T}{\partial x}}$$

In dieser Form ist das Fouriersche Gesetz auf Körper beliebiger Form anwendbar (das Minus-Zeichen besagt, dass der Wärmestrom in Richtung fallender Temperatur positiv ist).

Für eine <u>ebene Schicht</u> (A = *const*) ergibt sich nach Integration:



$$\int_{x_1}^{x_2} dx = -\frac{\lambda \cdot A}{\dot{Q}} \cdot \int_{T_1}^{T_2} dT; \qquad x_2 - x_1 = s = \frac{\lambda \cdot A}{\dot{Q}} \cdot (T_1 - T_2)$$

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{s} \cdot A \cdot (T_1 - T_2) = \alpha_{WL} \cdot A \cdot (T_1 - T_2)$$

mit $\alpha_{WL} = \dfrac{\lambda}{s}$

Integration für <u>Zylinderschale</u> ($A = 2\pi r \cdot l$): $\dot{Q} = -\lambda \cdot 2\pi l \cdot r \cdot \dfrac{dT}{dr}$

$$\dot{Q} \cdot \int_{r_i}^{r_a} \frac{dr}{r} = -\lambda \cdot 2\pi l \cdot \int_{T_i}^{T_a} dT \quad \rightarrow \quad \dot{Q} \cdot \ln\frac{r_a}{r_i} = \lambda \cdot 2\pi l \cdot (T_i - T_a)$$

$$\dot{Q} = \frac{\lambda \cdot 2\pi l}{\ln(r_a / r_i)} \cdot (T_i - T_a) = \frac{\lambda \cdot 2\pi l}{\ln(r_a / r_i)} \cdot \frac{r_a - r_i}{\underbrace{r_a - r_i}_{s}} \cdot (T_i - T_a); \quad \text{mit} \quad r_{m,Z} = \frac{r_a - r_i}{\ln(r_a / r_i)}:$$

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{s} \cdot 2\pi l \cdot r_{m,Z} \cdot (T_i - T_a) = \frac{\lambda}{s} \cdot A_{m,Z} \cdot (T_i - T_a) = \alpha_{WL} \cdot A_{m,Z} \cdot (T_i - T_a); \quad A_{m,Z} = 2\pi \cdot r_{m,Z} \cdot l$$

Integration für <u>Kugelschale</u> ($A = 4\pi r^2$): $\dot{Q} = -\lambda \cdot 4\pi r^2 \cdot \dfrac{dT}{dr}$

$$\dot{Q} \cdot \int_{r_i}^{r_a} \frac{dr}{r^2} = -\lambda \cdot 4\pi \cdot \int_{T_i}^{T_a} dT \quad \rightarrow \quad \dot{Q} \cdot \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}\right) = \dot{Q} \cdot \left(\frac{r_a - r_i}{r_i r_a}\right) = \lambda \cdot 4\pi \cdot (T_i - T_a)$$

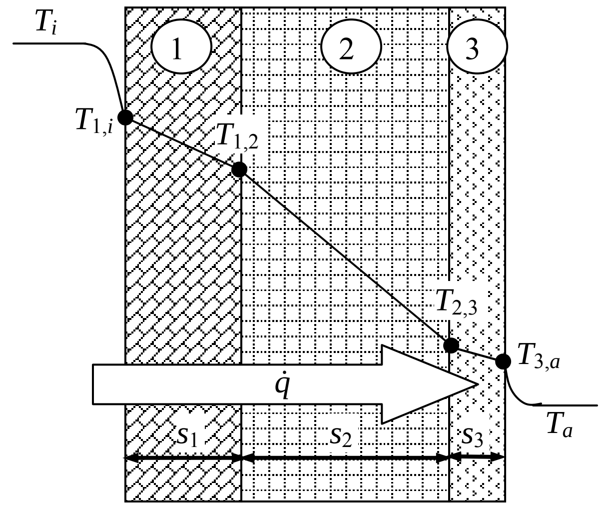
$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{r_a - r_i} \cdot 4\pi r_i r_a \cdot (T_i - T_a) = \frac{\lambda}{s} \cdot 4\pi r_{m,K}^2 \cdot (T_i - T_a) = \frac{\lambda}{s} \cdot A_{m,K} \cdot (T_i - T_a) = \alpha_{WL} \cdot A_{m,K} \cdot (T_i - T_a)$$

mit $r_{m,K} = \sqrt{r_i r_a}$ und $A_{m,K} = 4\pi r_{m,K}^2$

Allgemein (FS Abschnitt 1): $\boxed{\dot{Q} = -\lambda \cdot A_m \cdot \dfrac{\partial T}{\partial x}}$

Lösung 1. Aufgabe

a) Gesucht: $\dot{q} = k \cdot (T_i - T_a)$



$$k = \frac{1}{\dfrac{1}{\alpha_i} + \dfrac{s_1}{\lambda_1} + \dfrac{s_2}{\lambda_2(\overline{T}_2)} + \dfrac{s_3}{\lambda_3} + \dfrac{1}{\alpha_a}}; \quad \overline{T}_2 = \frac{T_{1,2} + T_{2,3}}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{q} &= \alpha_i (T_i - T_{i,1}) \\ \dot{q} &= \frac{\lambda_1}{s_1} \cdot (T_{i,1} - T_{1,2}) \end{aligned}\right\} \rightarrow T_{1,2} = T_i - \dot{q} \cdot \left(\frac{1}{\alpha_i} + \frac{s_1}{\lambda_1} \right)$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\lambda_3}{s_3} \cdot (T_{2,3} - T_{3,a}) \\ \dot{q} &= \alpha_a (T_{3,a} - T_a) \end{aligned}\right\} \rightarrow T_{2,3} = T_a + \dot{q} \cdot \left(\frac{s_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_a} \right)$$

$$\overline{T}_2 = \frac{1}{2}\left(T_i + T_a + \dot{q} \cdot \left(\frac{s_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_a} - \frac{1}{\alpha_i} - \frac{s_1}{\lambda_1} \right)\right)$$

$$\overline{T}_2 = 710\,°\text{C} + \dot{q} \cdot 0{,}006\,\tfrac{\text{K m}^2}{\text{W}} = a + b \cdot \dot{q}; \qquad \lambda_2(\overline{T}_2) = 0{,}5\,\tfrac{\text{W}}{\text{m K}} + \frac{\overline{T}_2}{2200}\,\tfrac{\text{W}}{\text{m K}^2} = 0{,}5\,\tfrac{\text{W}}{\text{m K}} + \frac{a + b \cdot \dot{q}}{2200}\,\tfrac{\text{W}}{\text{m K}^2}$$

$$\dot{q} = \frac{T_i - T_a}{\dfrac{1}{\alpha_i} + \dfrac{s_1}{\lambda_1} + \dfrac{s_2}{\lambda_2(\overline{T}_2)} + \dfrac{s_3}{\lambda_3} + \dfrac{1}{\alpha_a}} = \frac{T_i - T_a}{\dfrac{1}{\alpha_i} + \dfrac{s_1}{\lambda_1} + \dfrac{s_2}{0{,}5\,\frac{\text{W}}{\text{m K}} + \dfrac{a + b \cdot \dot{q}}{2200}\,\frac{\text{W}}{\text{m K}^2}} + \dfrac{s_3}{\lambda_3} + \dfrac{1}{\alpha_a}} = \frac{1380\,\text{K}}{0{,}089\,\frac{\text{m}^2\,\text{K}}{\text{W}} + \dfrac{0{,}3\,\text{m}}{c + d \cdot \dot{q}}}$$

Iterativ: Startwert: $\overline{T}_2 = \dfrac{T_1 + T_2}{2} = 710\,°\text{C} = a + b \cdot \dot{q}$ ergibt $\dot{q} = 3042{,}05\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

Einsetzen in die rechte Seite ergibt $\dot{q} = 3066{,}66\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

Analytisch: $\dot{q}^2 + 15522116\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot \dot{q} + 4677528090\,\frac{\text{W}^2}{\text{m}^4} = 0; \quad \dot{q} = 3066{,}86\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

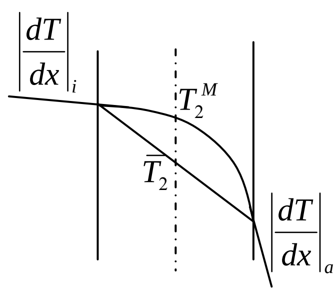
b) $\dot{q} = -\lambda \cdot \dfrac{dT}{dx}; \qquad \dot{q} \cdot dx = -\lambda \cdot dT = -\left(0{,}5 + \dfrac{T}{2200\,\text{K}} \right) \frac{\text{W}}{\text{m K}} \cdot dT;$

$$\dot{q} \cdot \int_0^{s_2} dx = -\int_{T_{1,2}}^{T_{2,3}} \left(0{,}5 + \frac{T}{2200\,\text{K}} \right) \tfrac{\text{W}}{\text{m K}} \cdot dT;$$

$$\dot{q} \cdot s_2 = \left[-0{,}5 \cdot (T_{2,3} - T_{1,2}) - \frac{1}{2200\,\text{K}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(T_{2,3}^2 - T_{1,2}^2 \right) \right] \tfrac{\text{W}}{\text{m K}}$$

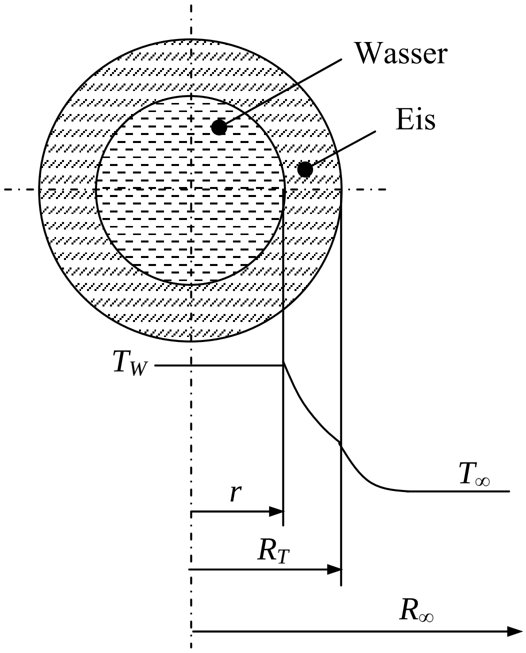
$$\dot{q} = \frac{1}{s_2} \cdot \left(0{,}5 + \frac{1}{2200} \cdot \frac{T_{2,3} + T_{1,2}}{2} \right) \tfrac{\text{W}}{\text{m K}} \cdot (T_{1,2} - T_{2,3}) = \frac{\lambda_2(\overline{T}_2)}{s_2} \cdot (T_{1,2} - T_{2,3}) \text{ also kein Fehler!}$$

c) Ist tatsächlich Temperatur T_2^M kleiner oder größer als $\overline{T}_2$?



Betrachte Steigungen: Wenn $\left|\dfrac{dT}{dx}\right|_i < \left|\dfrac{dT}{dx}\right|_a$, ist $T_2^M > \overline{T}_2$;

$\left|\dfrac{dT}{dx}\right| = \dfrac{\dot{q}}{\lambda_2}$; $T_{2,i} > T_{2,a}$; $\lambda_{2,i} > \lambda_{2,a}$; also $\left|\dfrac{dT}{dx}\right|_i < \left|\dfrac{dt}{dx}\right|_a$ und $T_2^M > \overline{T}_2$



Lösung 2. Aufgabe

Bilanz: $\frac{dH_T}{dt} = \frac{dH_W}{dt} + \frac{dH_E}{dt} = -\dot{Q}_{ab}$

(Indizes: T = Tropfen, W = Wasser; E = Eis)

$\frac{dH_E}{dt} = 0$ (da Wärmekapazität vernachlässigbar)

$$\frac{dH_W}{dt} = \Delta h_S \cdot \rho \cdot \frac{dV_W}{dt} = \Delta h_S \cdot \rho \cdot 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

Kinetik: $\dot{Q}_{ab} = k \cdot A_T \cdot (T_{T,0} - T_\infty)$

$$\frac{1}{k \cdot A_T} = \frac{s_E}{\lambda_E \cdot A_{m,E}} + \frac{s_\infty}{\lambda_L \cdot A_{m,\infty}} \quad \text{(FS Abschnitt 1)}$$

$s_E = R_T - r$; $A_{m,E} = 4\pi \cdot r \cdot R_T$

$s_\infty = R_\infty - R_T$; $A_{m,\infty} = 4\pi \cdot R_T \cdot R_\infty$; somit: $\frac{1}{k \cdot A_T} = \frac{R_T - r}{\lambda_E \cdot 4\pi \cdot r \cdot R_T} + \frac{R_\infty - R_T}{\lambda_L \cdot 4\pi \cdot R_T \cdot R_\infty}$

$$\frac{1}{k \cdot A_T} = \frac{1}{\lambda_E \cdot 4\pi \cdot r} - \frac{1}{\lambda_E \cdot 4\pi \cdot R_T} + \frac{1}{\lambda_L \cdot 4\pi \cdot R_T} - \frac{1}{\lambda_L \cdot 4\pi \cdot R_\infty} = \frac{1}{4\pi} \cdot \left(\frac{1}{\lambda_E r} - \frac{1}{\lambda_E R_T} + \frac{1}{\lambda_L R_T} \right)$$

Da R_∞ sehr groß ist, geht der letzte Term gegen Null!

$$\Delta h_S \cdot \rho \cdot 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt} = -4\pi \cdot \left(\frac{1}{\lambda_E r} - \frac{1}{\lambda_E R_T} + \frac{1}{\lambda_L R_T} \right)^{-1} \cdot (T_{T,0} - T_\infty)$$

$$r^2 \cdot \left(\frac{1}{\lambda_E r} - \frac{1}{\lambda_E R_T} + \frac{1}{\lambda_L R_T} \right) \cdot dr = -\frac{T_{T,0} - T_\infty}{\Delta h_S \cdot \rho} \cdot dt$$

$$\frac{1}{\lambda_E} \cdot \int_{R_T}^{r} r\,dr - \left(\frac{1}{\lambda_E R_T} - \frac{1}{\lambda_L R_T} \right) \cdot \int_{R_T}^{r} r^2\,dr = -\frac{T_{T,0} - T_\infty}{\Delta h_S \cdot \rho} \cdot \int_0^t dt$$

$$\frac{1}{2\lambda_E} \cdot \left(r^2 - R_T^2 \right) - \left(\frac{1}{3\lambda_E R_T} - \frac{1}{3\lambda_L R_T} \right) \cdot \left(r^3 - R_T^3 \right) = -\frac{T_{T,0} - T_\infty}{\Delta h_S \cdot \rho} \cdot t$$

Zeit, zu der $r = 0$: $\boxed{t_E = \frac{\Delta h_S \cdot \rho}{T_{T,0} - T_\infty} \cdot \left(\frac{R_T^2}{2\lambda_E} - \frac{R_T^2}{3\lambda_E} + \frac{R_T^2}{3\lambda_L} \right) = R_T^2 \cdot \frac{\Delta h_S \cdot \rho}{T_{T,0} - T_\infty} \cdot \left(\frac{1}{6\lambda_E} + \frac{1}{3\lambda_L} \right)}$

$$t_E = R_T^2 \cdot \frac{333 \cdot 10^3 \,\frac{\text{J}}{\text{kg}} \cdot 10^3 \,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{(0+10)\text{K}} \cdot \left(\frac{1}{6 \cdot 2{,}2 \,\frac{\text{W}}{\text{m K}}} + \frac{1}{3 \cdot 0{,}022 \,\frac{\text{W}}{\text{m K}}} \right) = R_T^2 \cdot 507068181{,}8 \,\frac{\text{s}}{\text{m}^2}$$

Zahlenwerte:

d, mm	1	0,5	0,2	0,1
R_T, m	0,0005	0,00025	0,0001	0,00005
t_E, s	126,8	31,7	5,1	1,3

Lösung 3. Aufgabe

$\dot{Q} = k \cdot A_a \cdot (T_i - T_a)$

1) Ohne Kontaktlinse (Index H = Hornhaut): $\dfrac{1}{k \cdot A_a} = \dfrac{1}{\alpha_i \cdot A_i} + \dfrac{1}{\alpha_H \cdot A_{m,H}} + \dfrac{1}{\alpha_a \cdot A_a}$

$$\alpha_H = \frac{\lambda_H}{s_H} = \frac{\lambda_1}{r_2 - r_1}; \quad A_{m,H} = \frac{1}{6} \cdot 4\pi \cdot r_{m,H}^2 \quad \text{mit} \quad r_{m,H} = \sqrt{r_2 \cdot r_1}$$

Zahlenwerte:

$$A_i = \frac{1}{6} \cdot 4\pi \cdot r_1^2 = \frac{1}{6} \cdot 4\pi \cdot 0{,}0102^2 \ \text{m}^2 = 0{,}000218 \ \text{m}^2$$

$$A_a = \frac{1}{6} \cdot 4\pi \cdot r_2^2 = \frac{1}{6} \cdot 4\pi \cdot 0{,}0127^2 \ \text{m}^2 = 0{,}000338 \ \text{m}^2 \quad \text{(Hornhaut!)}$$

$$r_{m,H} = \sqrt{r_2 \cdot r_1} = \sqrt{0{,}0127 \cdot 0{,}0102} \ \text{m} = 0{,}0114 \ \text{m}$$

$$A_{m,H} = \frac{1}{6} \cdot 4\pi \cdot r_{m,H}^2 = \frac{1}{6} \cdot 4\pi \cdot 0{,}0114^2 \ \text{m}^2 = 0{,}000271 \ \text{m}^2$$

$$\alpha_H = \frac{\lambda_1}{r_2 - r_1} = \frac{0{,}35}{0{,}0127 - 0{,}0102} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} = 140 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$

$$k \cdot A_a = \left(\frac{1}{12 \cdot 0{,}000218} + \frac{1}{140 \cdot 0{,}000271} + \frac{1}{6 \cdot 0{,}000338} \right)^{-1} \frac{\text{W}}{\text{K}} = 0{,}00111 \frac{\text{W}}{\text{K}}$$

$\dot{Q} = k \cdot A_a \cdot (T_i - T_a) = 0{,}00111 \cdot (37 - 21) = 0{,}0177 \ \text{W} = 17{,}7 \ \text{mW}$

2) Mit Kontaktlinse (Index K = Kontaktlinse):

$$\frac{1}{k \cdot A_a} = \frac{1}{\alpha_i \cdot A_i} + \frac{1}{\alpha_H \cdot A_{m,H}} + \frac{1}{\alpha_K \cdot A_{m,K}} + \frac{1}{\alpha_a \cdot A_a}$$

$$\alpha_K = \frac{\lambda_K}{s_K} = \frac{\lambda_2}{r_3 - r_2}; \quad A_{m,K} = \frac{1}{6} \cdot 4\pi \cdot r_{m,K}^2 \quad \text{mit} \quad r_{m,K} = \sqrt{r_3 \cdot r_2}$$

Zahlenwerte:

$$A_a = \frac{1}{6} \cdot 4\pi \cdot r_3^2 = \frac{1}{6} \cdot 4\pi \cdot 0{,}0165^2 \ \text{m}^2 = 0{,}000570 \ \text{m}^2 \quad \text{(Kontaktlinse!)}$$

$$r_{m,K} = \sqrt{r_3 \cdot r_2} = \sqrt{0{,}0165 \cdot 0{,}0127} \ \text{m} = 0{,}0145 \ \text{m}$$

$$A_{m,K} = \frac{1}{6} \cdot 4\pi \cdot r_{m,K}^2 = \frac{1}{6} \cdot 4\pi \cdot 0{,}0145^2 \ \text{m}^2 = 0{,}000439 \ \text{m}^2$$

$$\alpha_K = \frac{\lambda_2}{r_3 - r_2} = \frac{0{,}8}{0{,}0165 - 0{,}0127} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} = 210{,}5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$

$$k \cdot A_a = \left(\frac{1}{12 \cdot 0{,}000218} + \frac{1}{140 \cdot 0{,}000271} + \frac{1}{210{,}5 \cdot 0{,}000439} + \frac{1}{6 \cdot 0{,}000570} \right)^{-1} \frac{\text{W}}{\text{K}} = 0{,}00141 \frac{\text{W}}{\text{K}}$$

$\dot{Q} = k \cdot A_a \cdot (T_i - T_a) = 0{,}00111 \cdot (37 - 21) = 0{,}0225 \ \text{W} = 22{,}5 \ \text{mW}$

Kontaktlinse hat eine gute Wärmeleitfähigkeit, zusätzlich vergrößert sie die Oberfläche. Durch den verbesserten Abtransport von der Hornhaut (Linse besser als Umgebung) kann auch an der vergrößerten Außenoberfläche ein größerer Wärmestrom transportiert werden.