Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität · gegründet 1825

Institut für
Thermische Verfahrenstechnik

Prof. Dr.-Ing. Matthias Kind **Dr.-Ing. Thomas Wetzel**

Wärmeübertragung I

Lösung zur 7. Übung (Strahlung fester Oberflächen)

Einführung

Energietransport durch Wärmestrahlung

Jeder Körper emittiert und absorbiert Energie an seiner Oberfläche. Für alle Körper gibt es eine maximal mögliche Energieabgabe durch Wärmestrahlung, die wie folgt definiert ist:

$$_{\max}\dot{E}_{rad} = A \cdot C_S \cdot T^4$$

C_S ist der Strahlungskoeffizient des „schwarzen Körpers“ ($C_S = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W/m²K⁴).

Tatsächlich sind reale Körper nicht vollkommen schwarz, sondern mehr oder weniger „grau“. Für technische Berechnungen führt man einen „Schwärzegrad“ (Emissionsgrad), ein:

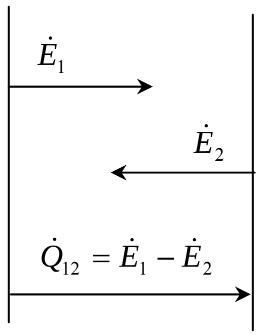
$$\varepsilon = \frac{\dot{E}_{rad}}{_{\max}\dot{E}_{rad}} < 1$$

Die Bezeichnung „grau“ hat mit der sichtbaren Farbe des Körpers nichts zu tun und bedeutet, dass die Strahlungsintensität für alle Wellenlängen um den konstanten Faktor ε geringer ist, als die des „schwarzen“ Strahlers. Ist ε eine Funktion der Wellenlänge, so handelt es sich um einen „selektiven“ Strahler. Die emittierte Strahlung eines grauen Körpers ist somit:

$$\dot{E}_{rad} = A \cdot \varepsilon \cdot C_S \cdot T^4$$

Der Wärmefluss zwischen zwei Platten, zwischen denen sich ein Vakuum oder ein verdünntes Gas befindet, ist gleich (Stefan-Boltzmann Gesetz):

$$\dot{Q}_{12} = A_1 \cdot C_{12} \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$



C_{12} ist der Strahlungskoeffizient (Funktion von ε_1, ε_2 und Geometrie). Daran erkennt man, dass der Wärmestrom nicht linear von der Temperaturdifferenz abhängig ist.

Linearisierung:

$$T_1^4 - T_2^4 = (T_1^2 - T_2^2)(T_1^2 + T_2^2) = \underline{\underline{(T_1 - T_2)}}(T_1 + T_2)(T_1^2 + T_2^2)\,;$$

$$T_1^2 + T_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \left((T_1 + T_2)^2 + (T_1 - T_2)^2\right) \rightarrow \alpha_{rad} = C_{12} \cdot (T_1 + T_2) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left((T_1 + T_2)^2 + (T_1 - T_2)^2\right)$$

$$\alpha_{rad} = C_{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot (T_1 + T_2)^3 \cdot \left(1 + \left(\frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2}\right)^2\right);$$ Annahme: $(T_1 - T_2)^2 << (T_1 + T_2)^2)$, somit:

$$\alpha_{rad} \approx C_{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot (T_1 + T_2)^3; \quad \text{mit} \quad T_m = \frac{T_1 + T_2}{2}: \quad \alpha_{rad} \approx 4C_{12} \cdot T_m^3$$

$$\dot{Q}_{12} \approx 4C_{12} \cdot T_m^3 \cdot A_1 \cdot (T_1 - T_2) \approx \alpha_{rad} \cdot A_1 \cdot (T_1 - T_2)$$

Die linearisierte Form wird nur dann benutzt, wenn eine Überlagerung mehrerer parallel ablaufender Wärmeübergangsvorgänge vorliegt (zum Summieren von α).

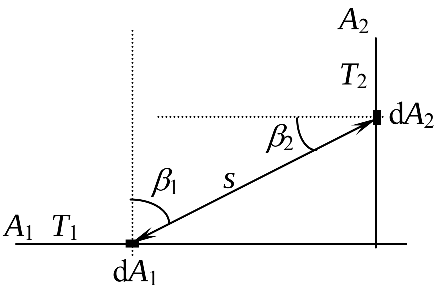
C_{12} – Strahlungskoeffizient, als Funktion von ε_1, ε_2 und Geometrie:

$$\boxed{C_{12} = \frac{\phi_{12} \cdot C_S}{1 + \phi_{12} \cdot \left[\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right) + \frac{A_1}{A_2} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)\right]}}$$

Hier ist ϕ_{12} – Winkelverhältnis:

$$\phi_{12} = \frac{1}{\pi \cdot A_1} \cdot \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2}{s^2} dA_1 dA_2$$

β – Winkel zwischen Strahlungsrichtung und Oberflächennormale.



Wenn A_1 von A_2 vollständig umschlossen und nicht konkav ist, ist ϕ_{12}=1. Dies entspricht folgenden Sonderfällen, die bei technischen Berechnungen sehr oft vorliegen:

1. zwei parallele ausgedehnte Platten: Wenn der Abstand zwischen den Platten klein im Vergleich zu den Abmessungen der Platten ist, kann man den Anteil der Strahlung, der an den Seiten aus dem Spalt austritt, vernachlässigen. Somit sind die Platten voneinander gegenseitig völlig umschlossen, und außerdem nicht konkav (eben), also ϕ_{12}=1. Für zwei gleiche Platten ergibt sich außerdem $A_1 = A_2$ und $A_1/A_2 = 1$. Die Formel für C_{12} vereinfacht sich somit zu:

$$\boxed{C_{12} = \frac{C_S}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}}$$

2. Ringspalt zwischen Rohrwänden (Mantelraum bei Doppelrohrwärmeübertragern): Das Innenrohr ist vom Außenrohr völlig umschlossen und nicht konkav (ϕ_{12}=1). Wenn die Durchmesser der Rohre groß sind und sich voneinander nicht sehr stark unterscheiden, kann man annehmen, dass $A_1 \approx A_2$ und $A_1/A_2 \approx 1$ (d.h. Krümmung wird vernachlässigt). So erhält man die gleiche Formel, wie für zwei ebene Platten.

3. Kleiner (punktförmiger) Körper mit nicht konkaver Oberfläche in einem großen Raum: ϕ_{12}=1, außerdem $A_1 << A_2$ und $A_1/A_2 \approx 0$. Für diesen Fall ist die Formel für C_{12}: $\boxed{C_{12} = \varepsilon_1 \cdot C_S}$

Lösung 1. Aufgabe

a) Wärmestromdichte für Isolierschicht und für Vakuumisolierung:

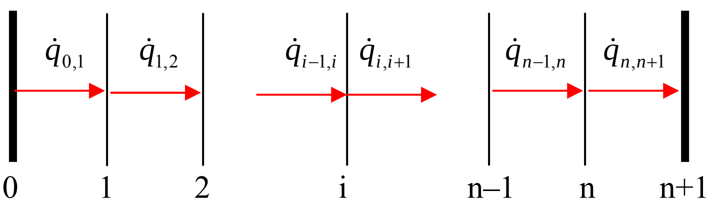
$$\dot{q}_{Iso} = \frac{\lambda}{s}(T_1 - T_2)$$
$$\dot{q}_{Vak} = \alpha_{rad}(T_1 - T_2)$$

Gleiche Isolierwirkung erzielt: $\dot{q}_{Iso} = \dot{q}_{Vak}$; $\frac{\lambda}{s}(T_1 - T_2) = \alpha_{rad}(T_1 - T_2)$ und somit $s = \frac{\lambda}{\alpha_{rad}}$

Mit $\alpha_{rad} \approx 4C_{12} \cdot T_m^3$ und $C_{12} = \frac{C_S}{\frac{2}{\varepsilon_W} - 1} = 1{,}01 \cdot 10^{-9}$: $s = \frac{0{,}01}{1{,}01 \cdot 10^{-9} \cdot T_m^3}$. Zahlenwerte:

T_1, K	T_2, K	T_m, K	s, m
310	290	300	0,367
210	190	200	1,237
110	90	100	9,877

b)



$\frac{\dot{q}_{mit}}{\dot{q}_{ohne}}$ – ?

Wände: ε_W ; Folien: ε_F

n Folien

$$\dot{q} = \dot{q}_{i-1,i} = \dot{q}_{i,i+1} \qquad (i = 1 \; bis \; n)$$

$$\dot{q}_{i-1,i} = \frac{C_s}{\frac{1}{\varepsilon_{i-1}} + \frac{1}{\varepsilon_i} - 1}(T_{i-1}^4 - T_i^4)\,; \quad \dot{q}_{i-1,i} \cdot \left(\tfrac{1}{\varepsilon_{i-1}} + \tfrac{1}{\varepsilon_i} - 1\right) = C_s(T_{i-1}^4 - T_i^4)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \dot{q}_{i-1,i}\left(\tfrac{1}{\varepsilon_{i-1}} + \tfrac{1}{\varepsilon_i} - 1\right) = C_s(T_0^4 - T_{n+1}^4) \;\rightarrow\; \dot{q}\sum_{i=1}^{n+1}\left(\tfrac{1}{\varepsilon_{i-1}} + \tfrac{1}{\varepsilon_i} - 1\right) = C_s(T_0^4 - T_{n+1}^4)$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_W\,; \quad \varepsilon_i = \varepsilon_F \quad (i = 1 \; bis \; n)$$

$$\dot{q}\left[\left(\tfrac{1}{\varepsilon_W} + \tfrac{1}{\varepsilon_F} - 1\right) + \sum_{i=2}^{n}\left(\tfrac{1}{\varepsilon_{i-1}} + \tfrac{1}{\varepsilon_i} - 1\right) + \left(\tfrac{1}{\varepsilon_F} + \tfrac{1}{\varepsilon_W} - 1\right)\right] = C_s(T_0^4 - T_{n+1}^4)$$

$$\dot{q}\left[\left(\tfrac{1}{\varepsilon_W} + \tfrac{1}{\varepsilon_F} - 1\right) + (n-1)\left(\tfrac{2}{\varepsilon_F} - 1\right) + \left(\tfrac{1}{\varepsilon_F} + \tfrac{1}{\varepsilon_W} - 1\right)\right] = C_s(T_0^4 - T_{n+1}^4)$$

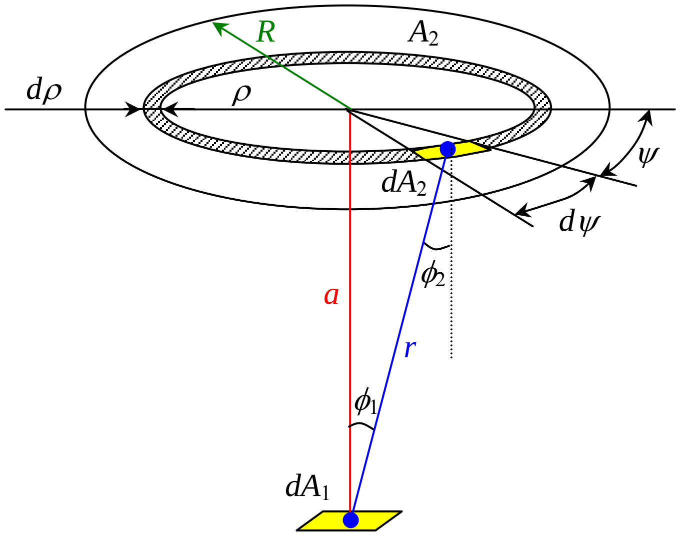
$$\dot{q}\left[\left(\tfrac{2}{\varepsilon_W} - 1\right) + n\left(\tfrac{2}{\varepsilon_F} - 1\right)\right] = C_s(T_0^4 - T_{n+1}^4)$$

$$\dot{q}_{mit} = \frac{C_s(T_0^4 - T_{n+1}^4)}{\left(\tfrac{2}{\varepsilon_W} - 1\right) + n\left(\tfrac{2}{\varepsilon_F} - 1\right)}\,; \qquad \dot{q}_{ohne} = \frac{C_s(T_0^4 - T_{n+1}^4)}{\left(\tfrac{2}{\varepsilon_W} - 1\right)}$$

$$\frac{\dot{q}_{mit}}{\dot{q}_{ohne}} = \frac{\left(\tfrac{2}{\varepsilon_W} - 1\right)}{\left(\tfrac{2}{\varepsilon_W} - 1\right) + n\left(\tfrac{2}{\varepsilon_F} - 1\right)} = \frac{1}{1 + n\frac{\varepsilon_W(2-\varepsilon_F)}{\varepsilon_F(2-\varepsilon_W)}} \left(\overset{\varepsilon_W = \varepsilon_F}{=} \frac{1}{1+n} \right)$$

Lösung 2. Aufgabe

Winkelverhältnis allgemein:



$$\varphi_{12} = \frac{1}{\pi \cdot A_1} \cdot \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos\phi_1 \cdot \cos\phi_2}{r^2} dA_1 dA_2$$

$dA_1 = A_1$ –Flächenelement;

A_2 –Kreisscheibe;

$$\varphi_{12} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{A_2} \frac{\cos\phi_1 \cdot \cos\phi_2}{r^2} dA_2$$

$$dA_2 = \rho \cdot d\psi \cdot d\rho$$

$$r^2 = \rho^2 + a^2$$

$$\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 = \frac{a}{r}$$

$$\varphi_{12} = \frac{1}{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{R} \frac{a^2}{r^4} \rho \, d\rho \, d\psi$$

$$\varphi_{12} = 2 \int_{\rho=0}^{R} \frac{a^2}{r^4} \rho \, d\rho$$

$$\varphi_{12} = 2 \int_{\rho=0}^{R} \frac{a^2}{(a^2+\rho^2)^2} \rho \, d\rho$$

$$\varphi_{12} = a^2 \int_{\rho=0}^{R} \frac{d(a^2+\rho^2)}{(a^2+\rho^2)^2}$$

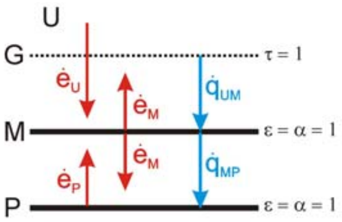
$$\varphi_{12} = -a^2(a^2+\rho^2)^{-1}\Big|_{a^2}^{a^2+R^2} = a^2(a^2+R^2)^{-1} + a^2(a^2)^{-1} = 1 - \frac{a^2}{a^2+R^2} = \frac{R^2}{a^2+R^2}$$

Lösung 3. Aufgabe

a) Wärmestrahlung eines schwarzen Strahlers: $\dot{e}_S = C_S \cdot T_S^4$

Himmel als schwarzer Strahler: $\dot{e}_U = C_S \cdot \left(T_H^*\right)^4 \;\rightarrow\; T_H^* = \sqrt[4]{\frac{\dot{e}_U}{C_S}} = \sqrt[4]{\frac{400}{5{,}67 \cdot 10^{-8}}} = 289{,}8\ \text{K}$

b) Membrantemperatur



Strahlungsleistung des Himmels geht durch die Glasscheibe hindurch wegen $\tau = 1$

Platte emittiert auch nach unten, ist hier aber außerhalb des Bilanzraums

Bilanz um die Membran: $0 = \dot{q}_{UM} - \dot{q}_{MP}$ mit $\dot{q}_{UM} = \dot{e}_U - \dot{e}_M$; $\dot{q}_{MP} = \dot{e}_M - \dot{e}_P$

Kinetiken: $\dot{e}_P = \varepsilon_P \cdot C_S \cdot T_P^4 = C_S \cdot T_P^4$; $\dot{e}_M = \varepsilon_M \cdot C_S \cdot T_M^4 = C_S \cdot T_M^4$

$$0 = \dot{e}_U + C_S \cdot T_P^4 - 2 \cdot C_S \cdot T_M^4$$

Mit $T_P = T_U$: $T_M = \sqrt[4]{\frac{\dot{e}_U + C_S \cdot T_U^4}{2 \cdot C_S}} = \sqrt[4]{\frac{400\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} + 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2\,\text{K}^4} \cdot (300\ \text{K})^4}{2 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2\,\text{K}^4}}} = 295\ \text{K}$

c) $T_M = \sqrt[4]{\frac{\dot{e}_U + C_S \cdot T_U^4}{2 \cdot C_S}} \;\rightarrow\; T_M^4 = \frac{\dot{e}_U + C_S \cdot T_U^4}{2 \cdot C_S}$

$T_M > T_U$ wenn $T_M^4 > T_U^4$; das gilt, wenn $\frac{\dot{e}_U + C_S \cdot T_U^4}{2 \cdot C_S} > T_U^4$ oder $\dot{e}_U > C_S \cdot T_U^4$

$T_M < T_U$ wenn $T_M^4 < T_U^4$; das gilt, wenn $\frac{\dot{e}_U + C_S \cdot T_U^4}{2 \cdot C_S} < T_U^4$ oder $\dot{e}_U < C_S \cdot T_U^4$