Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität · gegründet 1825
Institut für
Thermische Verfahrenstechnik

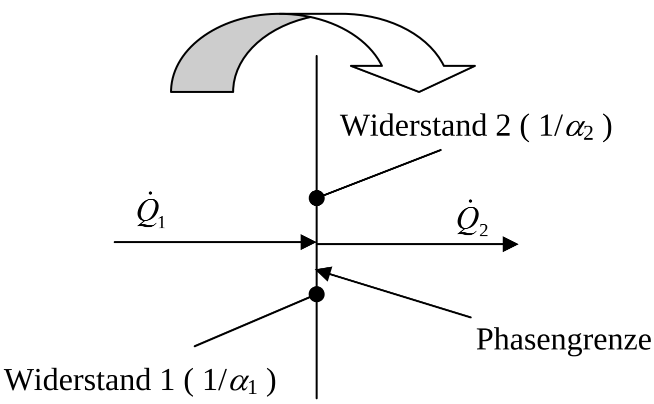
Prof. Dr.-Ing. Matthias Kind **Dr.-Ing. Thomas Wetzel**

Wärmeübertragung I

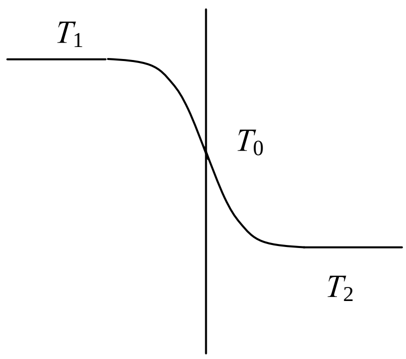
Lösung zur 6. Übung (Berechnung von Wärmedurchgangskoeffizienten)

Unter Wärmeübergang versteht man den Wärmetransport aus dem Phaseninneren an die Phasengrenze. Dabei bildet sich einseitig ein Temperaturprofil aus, und der Wärmeübergangs-widerstand ist durch einen α-Wert charakterisiert. Den Wärmetransport über die Phasengrenze hinweg in die andere Phase bezeichnet man als Wärmedurchgang. Dabei definieren die Wärmeübergangswiderstände an beiden Seiten der Phasengrenze die Geschwindigkeit des Wärmetransports. Der Wärmedurchgangskoeffizient k hängt deswegen von den α-Werten auf beiden Seiten der Phasengrenze ab.

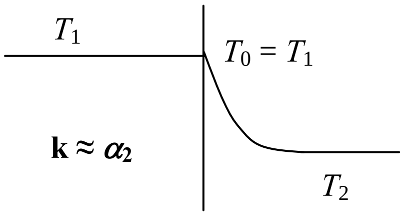
Wärmedurchgang (k)



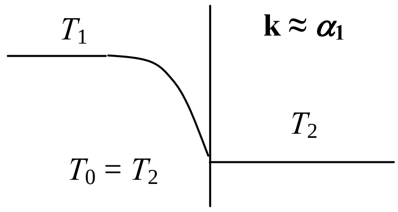
Temperaturprofil



Temperaturprofil
$\alpha_1 >> \alpha_2$ (α_2 limitiert)



Temperaturprofil
$\alpha_2 >> \alpha_1$ (α_1 limitiert)



Häufig haben α_1 und α_2 aber die gleiche Größenordnung. Daher müssen bei der Berechnung des Wärmedurchgangs beide Widerstände berücksichtigt werden. Da von einem stationären Zustand ausgegangen wird, ist der Wärmestrom konstant und auf beiden Seiten gleich:

$$\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 = \dot{Q}$$

Kinetischer Ansatz:

$$\left.\begin{aligned}\dot{Q}_1 = \dot{Q} = \alpha_1 \cdot A \cdot (T_1 - T_0)\\ \dot{Q}_2 = \dot{Q} = \alpha_2 \cdot A \cdot (T_0 - T_2)\end{aligned}\right\} \quad \dot{Q} = k \cdot A \cdot (T_1 - T_2)$$

T_0 ist zunächst unbekannt, diese Temperatur muss eliminiert werden.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\dot{Q}}{\alpha_1 \cdot A} = T_1 - T_0\\ \frac{\dot{Q}}{\alpha_2 \cdot A} = T_0 - T_2\end{aligned}\right\} \quad \text{2 Gleichungen addieren:} \quad \frac{\dot{Q}}{A} \cdot \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right) = T_1 - T_2$$

Nach $\dot{Q}$ auflösen: $\dot{Q} = \frac{1}{1/\alpha_1 + 1/\alpha_2} \cdot A \cdot (T_1 - T_2) = k \cdot A \cdot (T_1 - T_2)$

Somit ist die Formel für k bei einer Reihenschaltung der Wärmeübergangswiderstände:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}}$$

Der WDK ist immer oberflächenbezogen. Deswegen ist die allgemeine Formel aus der Formelsammlung nicht für k, sondern für (k•A) geschrieben. Das ist nur dann belanglos, wenn beide Oberflächen gleich groß sind (z.B. Wärmedurchgang durch eine ebene Platte). Bei unterschiedlichen Oberflächen (wie beim Wärmedurchgang durch eine zylindrische Rohrwand) muss die Oberfläche immer berücksichtigt werden. Die Formel dazu lautet:

$$k \cdot A = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 \cdot A_1} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot A_2}}$$

oder allgemein:

$$\boxed{k \cdot A_{Bezug} = \frac{1}{\sum_j \frac{1}{\alpha_j \cdot A_j}}}$$

(A_{Bezug} – eine der Oberflächen)

Der nach dieser Formel berechnete k-Wert kann dann auf eine beliebige Oberfläche bezogen werden.

Bei parallel verlaufenden Wärmeströmen ist der Gesamtwärmestrom auf jeder Seite gleich und besteht jeweils aus zwei (bzw. mehreren) Anteilen. Beispiel (Grillen):

Untere Seite(beide Ströme parallel):

$$\dot{Q}_{zu} = \dot{Q}_K + \dot{Q}_S = (\alpha_K + \alpha_S) \cdot A \cdot (T_{Kohle} - T_{Grillgut})$$

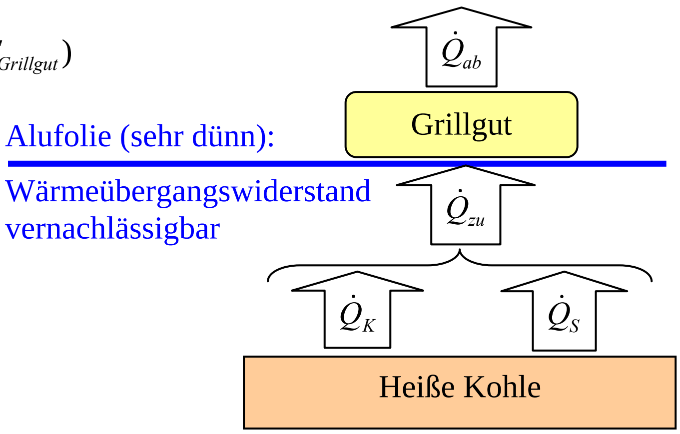
$$\alpha_{zu} = (\alpha_K + \alpha_S)$$

Obere Seite (nur ein Wärmestrom)

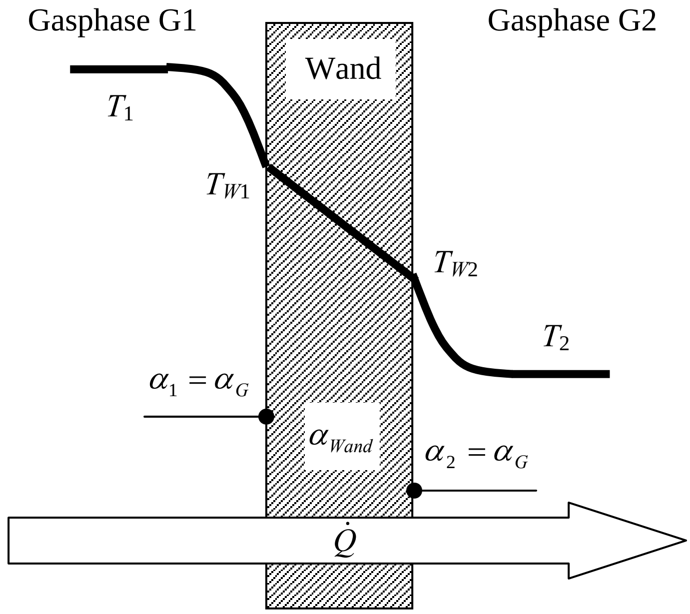
$$\dot{Q}_{ab} = \alpha_{ab} \cdot A \cdot (T_{Grillgut} - T_{Umgebung})$$

Da $\dot{Q}_{zu} = \dot{Q}_{ab} = \dot{Q}$:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_{zu}} + \frac{1}{\alpha_{ab}} = \frac{1}{\alpha_K + \alpha_S} + \frac{1}{\alpha_{ab}}$$



Lösung Aufgabe 1.



Gegeben: $k_{GG} = 20 \dfrac{W}{m^2 k}$; $k_{LL} = 750 \dfrac{W}{m^2 k}$; $\alpha_W = 25000 \dfrac{W}{m^2 k}$

Gesucht: a) α_G; α_L

b) k_{GL}

c) $\phi = k/k_0$

a) $\dot{Q} = k_{GG} \cdot A \cdot (T_1 - T_2)$

Der Wärmedurchgangwiderstand $1/k$ setzt sich aus einer Reihenschaltung dreier Widerstände zusammen: an der Phasengrenze der Gasphase G1, in der Wand und an der Phasengrenze der Gasphase G2 (s. Skizze). Der Wärmestrom $\dot{Q}$ ist jeweils der gleiche.

$$\dot{Q} = \alpha_G A (T_1 - T_{W1})$$
$$\dot{Q} = \alpha_W A (T_{W1} - T_{W2})$$
$$\dot{Q} = \alpha_G A (T_{W2} - T_2)$$

Eliminieren der unbekannten Temperaturen T_{W1} und T_{W2}: $\dfrac{\dot{Q}}{k_{GG} A} = (T_1 - T_2)$ und andererseits:

$$\frac{\dot{Q}}{\alpha_G A} = (T_1 - T_{W1});$$
$$\frac{\dot{Q}}{\alpha_W A} = (T_{W1} - T_{W2});$$
$$\frac{\dot{Q}}{\alpha_G A} = (T_{W2} - T_2)$$

nach dem Summieren dieser drei Gleichungen erhält man

$$\frac{\dot{Q}}{A}\cdot\frac{1}{k_{GG}}=(T_1-T_2) \quad \leftrightarrow \quad (T_1-T_{W1}+T_{W1}-T_{W2}+T_{W2}-T_2)=\frac{\dot{Q}}{A}\left(\frac{1}{\alpha_G}+\frac{1}{\alpha_W}+\frac{1}{\alpha_G}\right)$$

$$\frac{1}{k_{GG}}=\frac{2}{\alpha_G}+\frac{1}{\alpha_W}; \quad \rightarrow \quad \alpha_G=\frac{2}{\frac{1}{k_{GG}}-\frac{1}{\alpha_W}}=40\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K}}$$

analog für die Flüssigphase: $\alpha_L=\frac{2}{\frac{1}{k_{LL}}-\frac{1}{\alpha_W}}=1546\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K}}$

b) $$\frac{1}{k_{GL}}=\frac{1}{\alpha_G}+\frac{1}{\alpha_W}+\frac{1}{\alpha_L}=\left(\frac{1}{40}+\frac{1}{25000}+\frac{1}{1546}\right)\frac{m^2K}{W}=0{,}0257\frac{m^2K}{W}$$

$$k_{GL}=38{,}9\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K}}; \quad \text{Vergleich: } k=15\div 70\frac{W}{m^2K} \Rightarrow \bar{k}=42{,}5\frac{W}{m^2k}$$

c) $$R_f=\frac{1}{k}-\frac{1}{k_0}=\frac{1}{k_0}\left(\frac{k_0}{k}-1\right)=\frac{1}{k_0}\left(\frac{1}{\phi}-1\right) \qquad \text{mit } \phi=\frac{k}{k_0}$$

$$\phi=\frac{1}{1+R_f k_0}$$

I. Dampfturbinenkondensator

$$k_0=4000\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K}} \qquad R_f=0{,}2\cdot10^{-3}\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K}}$$

$$\phi=\frac{1}{1+4000\cdot0{,}2\cdot10^{-3}}=0{,}56$$

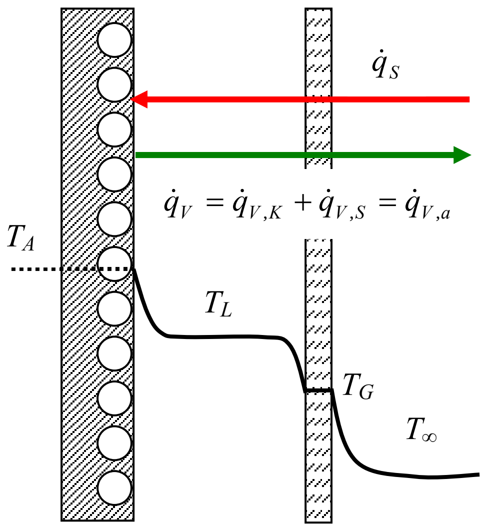
II. Gaserhitzer

$$k_0=20\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K}} \qquad R_f=0{,}4\cdot10^{-3}\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K}}$$

$$\phi=\frac{1}{1+20\cdot0{,}4\cdot10^{-3}}=0{,}99$$

Diskussion: Warum $R_f(T<50°C) < R_f(T>50°C)$

Lösung Aufgabe 2.



Gegeben: $\dot{q}_S = 700 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

$\alpha_K = 2 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\mathrm{K}} \quad \alpha_S = 8 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\mathrm{K}}$

$T_\infty = 10°C$

$\alpha_a = 25 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\mathrm{K}}$ (Strahlung + konvekt.)

Gesucht: $T_{A,\max}$

Stationärer Zustand: $\dot{q}_S = \dot{q}_V$

Absorberfläche → Glasscheibe: $\dot{q}_V = \dot{q}_{V,S} + \dot{q}_{V,K}$

Glasscheibe → Umgebung: $\dot{q}_V = \dot{q}_{V,a}$

$$\dot{q}_{V,S} = \alpha_S (T_A - T_G)$$

$$\dot{q}_{V,K} = \alpha_K (T_A - T_L) = \alpha_K (T_L - T_G) \rightarrow \dot{q}_{V,K} = \frac{\alpha_K}{2}(T_A - T_G)$$

$$\dot{q}_V = \alpha_S (T_A - T_G) + \frac{\alpha_K}{2}(T_A - T_G)$$

$$\dot{q}_V = \alpha_a (T_G - T_\infty)$$

$$\dot{q}_V \left(\frac{1}{\alpha_S + \frac{\alpha_K}{2}} + \frac{1}{\alpha_a} \right) = T_A - T_\infty ; \quad \dot{q}_V = \dot{q}_S$$

$$T_A = T_\infty + \dot{q}_S \left(\frac{1}{\alpha_S + \frac{\alpha_K}{2}} + \frac{1}{\alpha_a} \right) = 10°C + 700 \left(\frac{1}{8 + \frac{2}{2}} + \frac{1}{25} \right) °C$$

$$T_{A,\max} = 115{,}8°C$$

Weitere Zahlenwerte:

$\dot{q}_{V,S} = 622{,}2 \frac{W}{m^2}$

$\dot{q}_{V,K} = 77{,}8 \frac{W}{m^2}$

$T_G = 38°C$

$T_L = 76{,}9°C$