Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität · gegründet 1825

Institut für
Thermische Verfahrenstechnik

Prof. Dr.-Ing. Matthias Kind **Dr.-Ing. Thomas Wetzel**

Wärmeübertragung I

Lösung zur 5. Übung (Wirkungsgrad)

Der Wirkungsgrad ist die normierte Temperaturänderung des Wärmeträgers. Die Normierung der Temperatur erfolgt allgemein nach der Formel:

$$\theta = \frac{T - T_{\min}}{T_{\max} - T_{\min}}$$

$T_{\max}$ und $T_{\min}$ sind die maximale und minimale im System auftretende Temperatur. Normalerweise ist $T_{\max} = T_{1,ein}$ (Eintrittstemperatur des heißen Wärmeträgers) und $T_{\min} = T_{2,ein}$ (Eintrittstemperatur des kalten Wärmeträgers) !Es kann aber auch anders sein, aufpassen!). Somit ist die Normierung:

$$\theta = \frac{T - T_{2,ein}}{T_{1,ein} - T_{2,ein}}$$

θ nimmt die Werte von 0 bis 1 an. Normierte Eintrittstemperaturen sind:

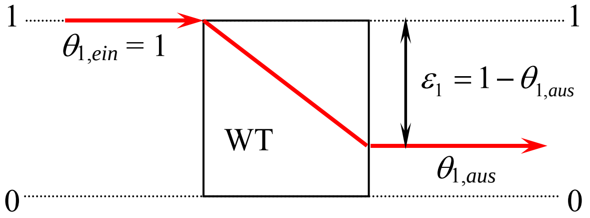
$$\theta_{1,ein} = \frac{T_{1,ein} - T_{2,ein}}{T_{1,ein} - T_{2,ein}} = 1 \qquad \theta_{2,ein} = \frac{T_{2,ein} - T_{2,ein}}{T_{1,ein} - T_{2,ein}} = 0$$

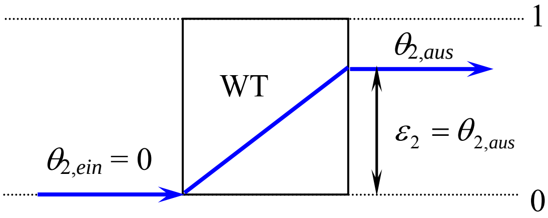
Die Temperaturänderung ist die Differenz zwischen Eintritts- und Austrittstemperatur. So ist die Temperaturänderung des Wärmeträgers „1" gleich ($T_{1,ein} - T_{1,aus}$), und die des Wärmeträgers „2" gleich ($T_{2,aus} - T_{2,ein}$). Durch Normierung der beiden Temperaturen ergibt sich die Definition des jeweiligen Wirkungsgrades:

$$\varepsilon_1 = \frac{T_{1,ein} - T_{2,ein}}{T_{1,ein} - T_{2,ein}} - \frac{T_{1,aus} - T_{2,ein}}{T_{1,ein} - T_{2,ein}} = 1 - \theta_{1,aus}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{T_{2,aus} - T_{2,ein}}{T_{1,ein} - T_{2,ein}} - \frac{T_{2,ein} - T_{2,ein}}{T_{1,ein} - T_{2,ein}} = \theta_{2,aus} - 0 = \theta_{2,aus}$$

Diese Definition kann auch graphisch dargestellt werden:





Der Wirkungsgrad ist ein Maß für die Effizienz des Wärmeübertragers (von 0 bis 1). Wenn z.B. die Wärmeübertragungsfläche des Doppelrohrapparates im Gegenstrom gegen unendlich geht, ist die Austrittstemperatur des Wärmeträgers „1" gleich der Eintrittstemperatur des Wärmeträgers „2", und die Austrittstemperatur des Wärmeträgers „2" gleich der Eintrittstemperatur des Wärmeträgers „1", es gilt also:

$T_{1,aus} = T_{2,ein}$ und $T_{2,aus} = T_{1,ein}$; $\theta_{1,aus} = \theta_{2,ein}$ und $\theta_{2,aus} = \theta_{1,ein}$; und somit Wirkungsgrad:

$$\varepsilon_1 = 1 - \theta_{1,aus} = 1 - \theta_{2,ein} = 1 - 0 = 1\,; \qquad \varepsilon_2 = \theta_{2,aus} = \theta_{1,ein} = 1$$

Die höchste Effizienz, die man also beim Gegenstrom erreichen kann ($A \rightarrow \infty$) ist 1. Dagegen sind im Gleichstrom, z.B. bei gleichen Kapazitätsströmen ($\dot{M}_1 c_{p,1} = \dot{M}_2 c_{p,2}$) und $A \rightarrow \infty$, die Austrittstemperaturen der beiden Wärmeträger gleich: $T_{1,aus} = T_{2,aus} = 1/2(T_{1,ein} + T_{2,ein})$. Daher ergeben sich die Wirkungsgrade für beide Wärmeträger zu $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}5$ (überprüfen!).

Die Formel für die Berechnung der Wirkungsgrade kann man aus der Bilanz für den jeweiligen Wärmeträger herleiten:

$$\dot{M}_i c_{p,i} (T_{i,ein} - T_{i,aus}) = k \cdot A \cdot \overline{\Delta T}\,; \qquad \text{Umformen:} \qquad \underbrace{\frac{T_{i,ein} - T_{i,aus}}{T_{max} - T_{min}}}_{\varepsilon_i} = \underbrace{\frac{kA}{\dot{M}_i c_{p,i}}}_{NTU_i} \cdot \underbrace{\frac{\overline{\Delta T}}{T_{max} - T_{min}}}_{\Theta}$$

$$\boxed{\varepsilon_i = NTU_i \cdot \Theta}$$

Aus dieser Formel ist auch die Formel für die Umrechnung von einem Wirkungsgrad in den anderen herzuleiten: $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \cdot R$ mit $R = NTU_2 / NTU_1$.

Für die Berechnung von Θ (mittlerer normierter Temperaturunterschied) gibt es in der Formelsammlung Abschnitt 2 für jeden Apparatetyp eine entsprechende Kurzformel.

Der Wirkungsgrad wird bei der Beurteilung der Effizienz eines Apparates benutzt. Er ist ein wichtiger Parameter bei Auslegung neuer und Optimierung existierender Prozesse und Anlagen. Außerdem ist die Berechnung von Wirkungsgraden bei komplizierten Verschaltungen vieler Wärmeübertrager eine einfache Methode um die Austrittstemperaturen und somit die Bilanzen um die einzelnen Apparate mit wenig Aufwand zu berechnen.

Lösung Aufgabe 1.

a) Temperatur T_8 aus der Gesamtbilanz

$$\dot{H}_{zu} - \dot{H}_{ab} + \dot{W}_{el} = 0$$

$$\dot{M}c_p T_0 - \dot{M}c_p T_8 + \dot{W}_{el} = 0$$

$$T_8 = T_0 + \frac{\dot{W}_{el}}{\dot{M}c_p} = \left(20 + \frac{200}{10}\right)°C = 40\ °C$$

b) Wirkungsgrade

$$NTU_A = \frac{k \cdot A}{R \cdot \dot{M}c_p} = \frac{5}{0{,}8 \cdot 10} = 0{,}625 \qquad NTU_B = \frac{k \cdot A}{(1-R) \cdot \dot{M}c_p} = \frac{5}{0{,}2 \cdot 10} = 2{,}5$$

$$\varepsilon_A = \Theta \cdot NTU_A; \quad \varepsilon_B = \frac{NTU_B}{NTU_A} \cdot \varepsilon_A; \quad \text{Hilfsfunktion: } \varphi(x) = \frac{x}{1-\exp(-x)}$$

WT I: Gegenstrom. $\frac{1}{\Theta} = \varphi(NTU_A - NTU_B) + NTU_B$

$$\frac{1}{\Theta} = \frac{NTU_A - NTU_B}{1-\exp(NTU_B - NTU_A)} + NTU_B = \frac{0{,}625 - 2{,}5}{1-\exp(2{,}5 - 0{,}625)} + 2{,}5 = 2{,}84$$

$$\varepsilon_{A,I} = \Theta \cdot NTU_A = \frac{NTU_A}{1/\Theta} = \frac{0{,}625}{2{,}84} = 0{,}220$$

$$\varepsilon_{B,I} = \frac{NTU_B}{NTU_A} \cdot \varepsilon_A = \frac{2{,}5}{0{,}625} \cdot 0{,}220 = 0{,}880$$

WT II: Gleichstrom. $\frac{1}{\Theta} = \varphi(NTU_A + NTU_B)$

$$\frac{1}{\Theta} = \frac{NTU_A + NTU_B}{1-\exp(-NTU_A - NTU_B)} = \frac{0{,}625 + 2{,}5}{1-\exp(-0{,}625 - 2{,}5)} = 3{,}27$$

$$\varepsilon_{A,II} = \Theta \cdot NTU_A = \frac{NTU_A}{1/\Theta} = \frac{0{,}625}{3{,}27} = 0{,}191$$

$$\varepsilon_{B,II} = \frac{NTU_B}{NTU_A} \cdot \varepsilon_A = \frac{2{,}5}{0{,}625} \cdot 0{,}191 = 0{,}765$$

c) Einzeltemperaturen

$$\varepsilon_{A,I} = \frac{T_2 - T_1}{T_6 - T_1} \qquad \varepsilon_{B,I} = \frac{T_6 - T_7}{T_6 - T_1} \qquad \varepsilon_{A,II} = \frac{T_3 - T_4}{T_3 - T_5} \qquad \varepsilon_{B,II} = \frac{T_6 - T_5}{T_3 - T_5}$$

Aus Bilanz um das Heizelement: $T_3 = T_2 + \frac{\dot{W}_{el}}{R \cdot \dot{M}c_p}$; außerdem $T_1 = T_0$ und $T_5 = T_0$

Somit erhalten wir ein System aus 7 Gleichungen mit 7 unbekannten Temperaturen. Nach dem Einsetzen von $T_1 = T_0$ und $T_5 = T_0$ bleiben noch 5 Gleichungen übrig:

(1) $T_2 - T_0 = (T_6 - T_0) \cdot \varepsilon_{A,I}$

(2) $T_6 - T_7 = (T_6 - T_0) \cdot \varepsilon_{B,I}$

(3) $T_3 - T_4 = (T_3 - T_0) \cdot \varepsilon_{A,II}$

(4) $T_6 - T_0 = (T_3 - T_0) \cdot \varepsilon_{B,II}$

(5) $T_3 = T_2 + \dfrac{\dot{W}_{el}}{R \cdot \dot{M}c_p}$

Aus (5): $T_2 = T_3 - \dfrac{\dot{W}_{el}}{R \cdot \dot{M}c_p}$; in (1) einsetzen: $T_3 = \dfrac{\dot{W}_{el}}{R \cdot \dot{M}c_p} + T_0 + (T_6 - T_0) \cdot \varepsilon_{A,I}$

In (4) einsetzen: $T_6 = T_0 + \left(\dfrac{\dot{W}_{el}}{R \cdot \dot{M}c_p} + (T_6 - T_0) \cdot \varepsilon_{A,I} \right) \cdot \varepsilon_{B,II}$

$$T_6 \cdot (1 - \varepsilon_{A,I} \cdot \varepsilon_{B,II}) = T_0 + \frac{\dot{W}_{el} \cdot \varepsilon_{B,II}}{R \cdot \dot{M}c_p} - T_0 \cdot \varepsilon_{A,I} \cdot \varepsilon_{B,II}$$

$$T_6 = \frac{T_0 + \dfrac{\dot{W}_{el} \cdot \varepsilon_{B,II}}{R \cdot \dot{M}c_p} - T_0 \cdot \varepsilon_{A,I} \cdot \varepsilon_{B,II}}{1 - \varepsilon_{A,I} \cdot \varepsilon_{B,II}} = \left(\frac{20 + \dfrac{200 \cdot 0{,}765}{0{,}8 \cdot 10} - 20 \cdot 0{,}220 \cdot 0{,}765}{1 - 0{,}220 \cdot 0{,}765} \right) °C = 43\ °C$$

$$T_3 = \frac{\dot{W}_{el}}{R \cdot \dot{M}c_p} + T_0 + (T_6 - T_0) \cdot \varepsilon_{A,I} = \left(\frac{200}{0{,}8 \cdot 10} + 20 + (43 - 20) \cdot 0{,}220 \right) °C = 50{,}06\ °C$$

$$T_2 = T_3 - \frac{\dot{W}_{el}}{R \cdot \dot{M}c_p} = \left(50{,}1 - \frac{200}{0{,}8 \cdot 10} \right) °C = 25{,}1\ °C$$

Aus (2): $T_7 = T_6 - (T_6 - T_0) \cdot \varepsilon_{B,I} = (43 - (43 - 20) \cdot 0{,}880)°C = 22{,}76\ °C$

Aus (3): $T_4 = T_3 - (T_3 - T_0) \cdot \varepsilon_{A,II} = (50{,}06 - (50{,}06 - 20) \cdot 0{,}191)°C = 44{,}32\ °C$

Überprüfen: $T_8 = R \cdot T_4 + (1 - R) \cdot T_7 = 40\ °$

Lösung Aufgabe 2.

a) aus der Formelsammlung: $\varepsilon_{1,i} = NTU_{1,i} \cdot \Theta$ mit $\frac{1}{\Theta} = 1 + NTU_{1,i} + R \cdot NTU_{1,i}$

Weitere Entwicklung dieser Formel führt zu folgendem Ansatz für Wirkungsgrad:

$$\varepsilon_{1,i} = \frac{NTU_{1,i}}{1 + NTU_{1,i} + R \cdot NTU_{1,i}}$$

b) Aus der Formelsammlung:

Gleichstrom: $\frac{1}{\Theta} = \varphi(NTU_1 + NTU_2)$

Gegenstrom: $\frac{1}{\Theta} = \varphi(NTU_1 - NTU_2) + NTU_2$

Mit der Hilfsfunktion $\varphi(x) = \frac{x}{1 - \exp(-x)}$ ergibt sich für

Gleichstrom: $$\frac{1}{\Theta} = \frac{NTU_1 + NTU_2}{1 - \exp(-NTU_1 - NTU_2)}$$

Gegenstrom: $$\frac{1}{\Theta} = \frac{NTU_1 - NTU_2}{1 - \exp(-NTU_1 + NTU_2)} + NTU_2$$

Weiterhin, mit $\varepsilon_1 = NTU_1 \cdot \Theta$ und $R = NTU_2 / NTU_1$:

Gleichstrom: $$\varepsilon_{1,Gl} = \frac{1 - \exp(-(1+R) \cdot NTU_1)}{1 + R}$$

Gegenstrom: $$\varepsilon_{1,Gg} = \frac{1 - \exp(R \cdot NTU_1 - NTU_1)}{1 - R \cdot \exp(R \cdot NTU_1 - NTU_1)}$$

Anmerkung: für den Fall $R = 1$ ($NTU_1 = NTU_2$) bei Gegenstrom ergibt sich für ε ein unbestimmter Ausdruck (0/0). In diesem Fall ist die Formel für $1/\Theta$:

$$\frac{1}{\Theta} = \lim_{(NTU_1 - NTU_2) \to 0} \left[\frac{NTU_1 - NTU_2}{1 - \exp(-NTU_1 + NTU_2)} \right] + NTU_2 = 1 + NTU_2 = 1 + NTU_1$$

und somit $\varepsilon_{1,Gg} = \frac{NTU_1}{1 + NTU_1}$