Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität · gegründet 1825

Institut für
Thermische Verfahrenstechnik

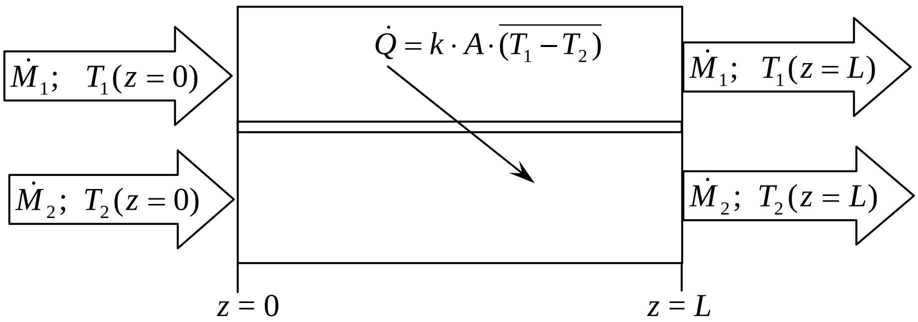
**Prof. Dr.-Ing. Matthias Kind** **Dr.-Ing. Thomas Wetzel**

# Wärmeübertragung I

## Lösung zur 4. Übung ($\Delta T_{LM}$ (Rührkessel, Gleich-, Gegenstrom))

### Einführung

Ein in der Wärmeübertragung häufig auftretendes Problem ist die stationäre Wärmeübertragung zwischen zwei Strömen, die ihre Temperatur entlang des Wärmeübertragungswegs ändern. Hilfreich ist hier eine gemittelte Kinetik, welche die Wärmeübertragung nur in Abhängigkeit der leicht zugänglichen Ein- und Austrittstemperaturen und nicht abhängig von den lokalen Temperaturen ausdrückt. Der Index „1" wird dabei stets dem Strom mit der höheren Temperatur zugeordnet (bei der Anwendung der gemittelten Kinetik beachten!).




Kinetischer Ansatz allgemein: $\dot{Q} = k \cdot A \cdot \overline{(T_1 - T_2)}$

$\overline{\Delta T}$ ist die mittlere Temperaturdifferenz im Apparat. In einem beidseitig durchmischten Rührkessel ist die Temperaturdifferenz überall gleich, also gilt: $\dot{Q} = k \cdot A \cdot (T_1 - T_2)$ .

Häufig sind $T_1$ und $T_2$ aber nicht konstant. In diesem Fall stellt sich die Frage, welcher Mittelwert in den kinetischen Ansatz einzusetzen ist. Für den Doppelrohrapparat wurde dies in der Vorlesung hergeleitet. Hier soll dies nun am Beispiel eines Rührkessels mit Kühlschlange geschehen.

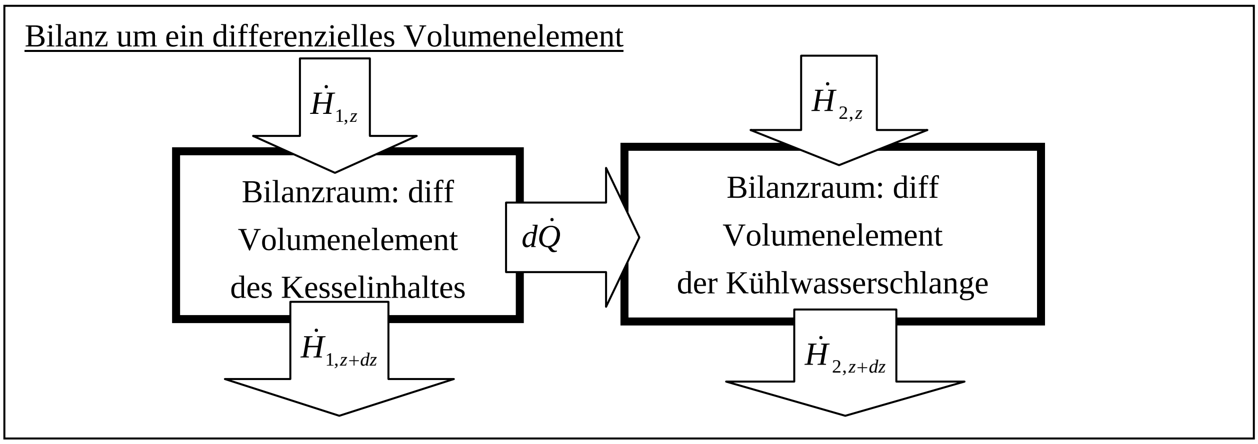
Angenommen, die Oberfläche $A$ nimmt entlang einer Koordinatenrichtung $z$ zu (die Koordinatenrichtung ist normalerweise parallel zu einem der Flüssigkeitsströme im Apparat), so dass bei $z = 0$ (Eintritt) $A = 0$ ist und bei $z = L$ (Austritt) $A = A_{Gesamt}$. Man betrachtet ein differenzielles Volumenelement der Strömung (von $z$ bis $z + dz$), das klein genug ist, damit die Temperaturdifferenz durch lokale Temperaturen ausgedrückt werden kann:

$\Delta T(z) = T_1(z) - T_2(z)$. Somit ist der kinetische Ansatz in differenzieller Form:

$$d\dot{Q} = k \cdot dA \cdot \left(T_1(z) - T_2(z)\right) = k \cdot dA \cdot \Delta T(z) \tag{1}$$

Damit man nun auf die mittlere Temperaturdifferenz kommt, muss man diese Gleichung von $A = 0$ bis $A = A_{Gesamt}$ integrieren. Das Problem bei der Integration ist, dass die lokalen Temperaturen unbekannt sind. Der Verlauf der Temperaturdifferenz $\Delta T$ entlang der

Koordinatenrichtung als Funktion von $z$ ist also noch nicht definiert. Um die unbekannten Größen zu eliminieren, werden weitere Gleichungen benötigt. Die Bilanz um ein differenzielles Volumenelement, z.B. eines Rührkessels mit Kühlwasserschlange, liefert:




Auf der Seite der Rohrschlange: $\dot{H}_{2,z} - \dot{H}_{2,z+dz} + d\dot{Q} = 0$; $\quad d\dot{Q} = \dot{M}_2 c_{p,2} dT_2(z)$

Differenzielle Kinetik: $d\dot{Q} = k \cdot dA \cdot (T_1(z) - T_2(z)) = k \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dz \cdot (T_1 - T_2(z))$

da der Rührkessel vollständig rückvermischt ist gilt für die Temperaturen entlang der Wärmeübertragungsfläche: $T_1(z) = T_{1,0} = T_{1,L} = T_{1,aus} = const.$

Nach dem Gleichsetzen erhält man:

$$\dot{M}_2 c_{p,2} dT_2(z) = -\dot{M}_2 c_{p,2} d(T_1 - T_2(z)) = k \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dz \cdot (T_1 - T_2(z)) \qquad (2)$$

Diese Gleichung kann nach der Trennung der Variablen direkt integriert werden:

$$-\int_{z=0}^{z=L} \frac{d(T_1 - T_2(z))}{(T_1 - T_2(z))} = \frac{k \cdot 2 \cdot \pi \cdot r}{\dot{M}_2 c_{p,2}} \cdot \int_0^L dz$$

$$-\ln \frac{T_1 - T_{2,L}}{T_1 - T_{2,0}} = \ln \frac{T_{1,0} - T_{2,0}}{T_{1,L} - T_{2,L}} = \ln \frac{\Delta T(z=0)}{\Delta T(z=L)} = \frac{kA}{\dot{M}_2 c_{p,2}} \qquad (3)$$

Aus der Gesamtbilanz um die Rohrschlange folgt:

$$\dot{Q} = \dot{M}_2 c_{p,2} (T_{2,aus} - T_{2,ein}) \rightarrow \dot{M}_2 c_{p,2} = \frac{\dot{Q}}{T_{2,aus} - T_{2,ein}}$$

Und eingesetzt in die Gleichung (3) ergibt sich:

$$\ln \frac{\Delta T(z=0)}{\Delta T(z=L)} = kA \cdot \frac{T_{2,aus} - T_{2,ein}}{\dot{Q}}$$

$$\dot{Q} = kA \cdot \frac{T_{2,aus} - T_{2,ein}}{\ln \frac{\Delta T(z=0)}{\Delta T(z=L)}} = kA \cdot \frac{T_1 - T_{2,ein} - T_1 + T_{2,aus}}{\ln \frac{\Delta T(z=0)}{\Delta T(z=L)}} = kA \cdot \frac{\Delta T(z=0) - \Delta T(z=L)}{\ln \frac{\Delta T(z=0)}{\Delta T(z=L)}} = k \cdot A \cdot \Delta T_{LM}$$

$\Delta T_{LM}$ nennt man die mittlere logarithmische Temperaturdifferenz. Diese Formel gilt auch für Rührkessel mit Heizschlange, sowie für den Doppelrohrapparat mit Gleich- und Gegenstrom (siehe Herleitung Vorlesung).

Allgemein gilt für Rührkessel und Doppelrohrapparat
im ***stationären*** Betrieb:

$$\dot{Q} = k \cdot A \cdot \Delta T_{LM}$$

$$\Delta T_{LM} = \frac{\left(T_{1,0} - T_{2,0}\right) - \left(T_{1,L} - T_{2,L}\right)}{\ln \dfrac{\left(T_{1,0} - T_{2,0}\right)}{\left(T_{1,L} - T_{2,L}\right)}}$$

Kurzschreibweise:

$$\Delta T_{LM} = \frac{\Delta T(z=0) - \Delta T(z=L)}{\ln \dfrac{\Delta T(z=0)}{\Delta T(z=L)}}$$

„1“: heißer Strom

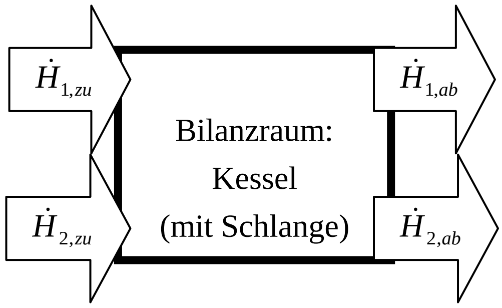
„2“: kalter Strom

$\dot{Q}$ von 1 nach 2 angenommen

Lösung 1. Aufgabe

Beschreibung des Gegenstandes:

Schematische Skizze zur Bilanz




Aufgabeteil a) Gefragt ist $\dot{M}_{2,\min}$

Grundgesetze: $\dfrac{dH}{dt} = \dot{H}_{1,zu} + \dot{H}_{2,zu} - \dot{H}_{1,ab} - \dot{H}_{2,ab} = 0$ (stationärer Betrieb)

$$\dot{H}_{1,zu} = \dot{M}_1 c_{p,1} T_{1,ein} \quad \dot{H}_{1,ab} = \dot{M}_1 c_{p,1} T_{1,aus} \quad \dot{H}_{2,zu} = \dot{M}_2 c_{p,2} T_{2,ein} \quad \dot{H}_{2,ab} = \dot{M}_2 c_{p,2} T_{2,aus}$$

einsetzen: $\dot{M}_1 c_{p,1}(T_{1,ein} - T_{1,aus}) + \dot{M}_2 c_{p,2}(T_{2,ein} - T_{2,aus}) = 0$; $\dot{M}_2 = \dot{M}_1 \cdot \dfrac{c_{p,1}}{c_{p,2}} \cdot \dfrac{T_{1,ein} - T_{1,aus}}{T_{2,aus} - T_{2,ein}}$

Der einziger Wert, der sich in der Gleichung für $\dot{M}_{2,\min}$ verändert, ist die Temperatur $T_{2,aus}$. Damit die Kühlaufgabe erfüllt wird und dabei $\dot{M}_2 = \dot{M}_{2,\min}$ gilt, muss die Temperatur $T_{2,aus} = T_{2,aus,max}$ sein. Der maximal möglicher Wert von $T_{2,aus}$ ist $T_{1,aus}$ (die Temperatur des Kühlwassers kann nicht höher sein, als die Temperatur des Kesselinhalts). Somit ergibt sich:

$$\dot{M}_{2,\min} = \dot{M}_1 \cdot \frac{c_{p,1}}{c_{p,2}} \cdot \frac{T_{1,ein} - T_{1,aus}}{T_{1,aus} - T_{2,ein}} = 0{,}5\,\tfrac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot \frac{2\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}}{4\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}} \cdot \frac{100\,°\text{C} - 40\,°\text{C}}{40\,°\text{C} - 10\,°\text{C}} = 0{,}5\,\tfrac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Aufgabeteil b). Gefragt ist der innere Durchmesser der Rohrschlange $d_i$.

$$\dot{M}_2 = 1{,}5 \cdot \dot{M}_{2,\min} = 1{,}5 \cdot 0{,}5\,\tfrac{\text{kg}}{\text{s}} = 0{,}75\,\tfrac{\text{kg}}{\text{s}}$$

$$\dot{M}_2 = \dot{V}_2 \cdot \rho_2 = u \cdot A_{Querschnitt} \cdot \rho_2 = u \cdot \frac{\pi \cdot d_i^2}{4} \cdot \rho_2$$

$$d_i = \sqrt{\frac{4 \cdot \dot{M}_2}{\pi \cdot u \cdot \rho_2}} \qquad \text{da } u \le 1\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\text{, gilt} \qquad d_i \ge \sqrt{\frac{4 \cdot 0{,}75\,\frac{\text{kg}}{\text{s}}}{\pi \cdot 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}} = 0{,}0309\,\text{m}$$

Aus der Tabelle der nächstgrößere Durchmesser: $d_i = 31$ mm.

Aufgabeteil c). Gefragt ist zunächst die Oberfläche der Rohrschlange $A$ (Mantelfläche!).

Die Oberfläche berechnet sich aus dem kinetischen Ansatz $\dot{Q} = k \cdot A \cdot \Delta T_{LM}$

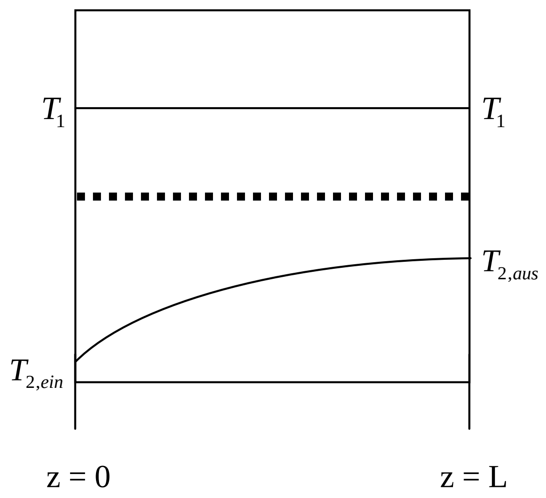
Der Wärmestrom $\dot{Q}$ ergibt sich aus der Bilanz um den Kesselinhalt:

$$\frac{dH}{dt} = \dot{H}_{1,zu} - \dot{H}_{1,ab} - \dot{Q} = \dot{M}_1 c_{p,1}(T_{1,ein} - T_{1,aus}) - \dot{Q} = 0$$

$$\dot{Q} = \dot{M}_1 c_{p,1}(T_{1,ein} - T_{1,aus}) = 0{,}5\,\tfrac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot 2\,\tfrac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \cdot (100\,°\text{C} - 40\,°\text{C}) = 60\text{ kW}$$

$$\Delta T_{LM} = \frac{\Delta T(z=0) - \Delta T(z=L)}{\ln \dfrac{\Delta T(z=0)}{\Delta T(z=L)}}$$

Temperaturprofile:




$$\Delta T(z=0) = T_1 - T_{2,ein}$$

$\Delta T(z=L) = T_1 - T_{2,aus}$ ($T_1$ ist überall im Kessel gleich und gleich $T_{1,aus}$!)

$T_{2,aus}$ aus der Bilanz um die Rohrschlange:

$$\frac{dH}{dt} = \dot{H}_{2,zu} - \dot{H}_{2,ab} + \dot{Q} = \dot{M}_2 c_{p,2} T_{2,ein} - \dot{M}_2 c_{p,2} T_{2,aus} + \dot{Q} = 0$$

$$T_{2,aus} = T_{2,ein} + \frac{\dot{Q}}{\dot{M}_2 c_{p,2}} = 10\,°\text{C} + \frac{60\,000\text{ W}}{0{,}75\,\tfrac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot 4 \cdot 10^3\,\tfrac{\text{J}}{\text{kg K}}} = 30\,°\text{C}$$

$$\Delta T_{LM} = \frac{(T_{1,aus} - T_{2,ein}) - (T_{1,aus} - T_{2,aus})}{\ln \dfrac{T_{1,aus} - T_{2,ein}}{T_{1,aus} - T_{2,aus}}} = \frac{(40\,°\text{C} - 10\,°\text{C}) - (40\,°\text{C} - 30\,°\text{C})}{\ln \dfrac{40\,°\text{C} - 10\,°\text{C}}{40\,°\text{C} - 30\,°\text{C}}} = 18{,}2°\text{C}$$

Somit die Oberfläche der Rohrschlange:

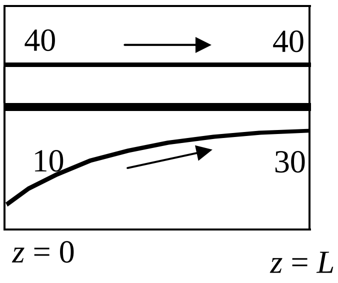
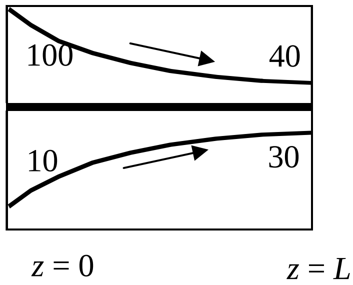
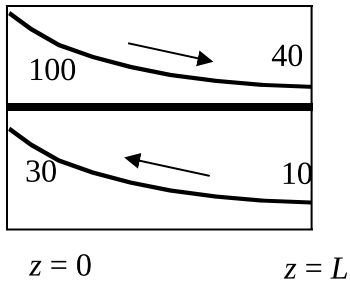
$$A = \frac{\dot{Q}}{k \cdot \Delta T_{LM}} = \frac{60\,000\text{ W}}{800\,\tfrac{\text{W}}{\text{m}^2\text{ K}} \cdot 18{,}2\text{ K}} = 4{,}12\text{ m}^2$$

Weiter gefragt: Länge der Rohrschlange. Aus Geometrie: $A = \pi \cdot d_a \cdot L$

$d_a$ = 35 mm (aus der Tabelle), so dass $L = \dfrac{A}{\pi \cdot d_a} = \dfrac{4{,}12}{\pi \cdot 0{,}035} = 37{,}5\text{ m}$

Lösung 2. Aufgabe.

$$A = \frac{\dot{Q}}{k \cdot \Delta T_{LM}}$$

| | Rührkessel | Gleichstrom | Gegenstrom |
|---|---|---|---|
| $\dot{Q}$ | 60 000 W | 60 000 W | 60 000 W |
| k | 800 W/(m²K) | 600 W/(m²K) | 600 W/(m²K) |
| Skizze |  |  |  |
| $\Delta T$ $(z = 0)$ | 30 K | 90 K | 70 K |
| $\Delta T$ $(z = L)$ | 10 K | 10 K | 30 K |
| $\Delta T_{LM}$ | 18,2 K | 36,4 K | 47,2 K |
| A | 4,12 m² | 2,75 m² | 2,12 m² |