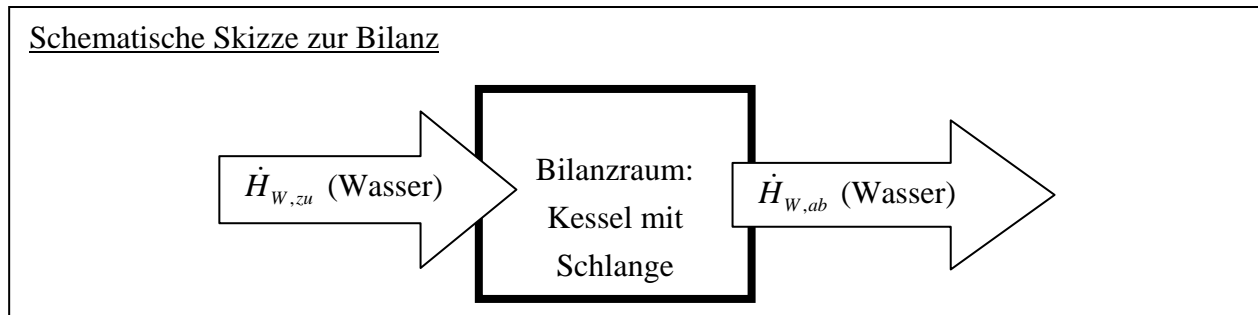


Wärmeübertragung I

Lösung zur 3. Übung (Differenzielle Bilanz)

Lösung Aufgabe 1

1) Beschreibung des Gegenstandes.



2) Aufgabeteil a): Gefragt ist $T_K(t)$ und $T_{W,aus}(t)$

3) Grundgesetze.
$$\frac{dH}{dt} = \dot{Q}_{zu} - \dot{Q}_{ab} + \dot{W} + \dot{H}_{zu} - \dot{H}_{ab}$$

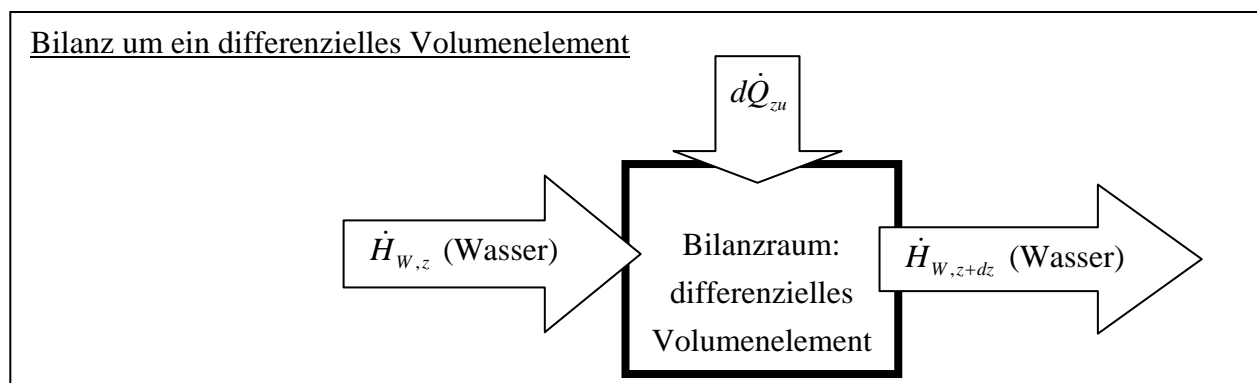
$$\frac{dH}{dt} = \frac{dH_K}{dt} + \underbrace{\frac{dH_{Stahlteile}}{dt}}_{\approx 0 \text{ siehe Aufgabe}} + \underbrace{\frac{dH_{Heizschlange}}{dt}}_{\approx 0 \text{ gegenüber Kesselinhalt}} = M_K \cdot c_{p,K} \cdot \frac{dT_K}{dt}$$

$$\dot{Q}_{zu} = \dot{Q}_{ab} = \dot{W} = 0; \quad \dot{H}_{zu} = \dot{M}_W \cdot c_{p,W} \cdot T_{W,ein}; \quad \dot{H}_{ab} = \dot{M}_W \cdot c_{p,W} \cdot T_{W,aus}$$

4) Entwicklung nach den gesuchten Größen. Alles in die Gleichung einsetzen:

$$M_K \cdot c_{p,K} \cdot \underbrace{\frac{dT_K}{dt}}_{\text{gesucht}} = \dot{M}_W \cdot c_{p,W} \cdot \left(T_{W,ein} - \underbrace{T_{W,aus}(t)}_{\text{unbekannt}} \right) \quad (1)$$

Brauchen $T_{W,aus}(t)$ als Funktion von $T_K(t)$. $T_{W,aus}(t)$ kann aus zusätzlicher Bilanz um die Rohrschlange berechnet werden. Bilanzraum: differenzielles Volumenelement der Rohrschlange:



$$\frac{dH}{dt} = d\dot{Q}_{zu} + \dot{H}_{W,z} - \dot{H}_{W,z+dz} = 0 \quad (\text{quasistationär});$$

$$\dot{H}_{W,z} - \dot{H}_{W,z+dz} = \dot{M}_W \cdot c_{p,W} \cdot (T_W(z) - T_W(z+dz)); \quad d\dot{Q}_{zu} = k \cdot dA \cdot (T_K(t) - T_W(z))$$

$$0 = k \cdot dA \cdot (T_K(t) - T_W(z)) + \dot{M}_W \cdot c_{p,W} \cdot (T_W(z) - T_W(z+dz));$$

$$k \cdot dA \cdot (T_K(t) - T_W(z)) = k \cdot \pi \cdot d \cdot dz \cdot (T_K(t) - T_W(z)) = \dot{M}_W \cdot c_{p,W} \cdot \left(T_W(z) + \frac{dT_W(z)}{dz} \cdot dz - T_W(z) \right)$$

$$k \cdot \pi \cdot d \cdot (T_K(t) - T_W(z)) = \dot{M}_W \cdot c_{p,W} \cdot \frac{dT_W(z)}{dz}; \quad \frac{k \cdot \pi \cdot d \cdot dz}{\dot{M}_W \cdot c_{p,W}} = \frac{k \cdot dA}{\dot{M}_W \cdot c_{p,W}} = \frac{dT_W(z)}{T_K(t) - T_W(z)}$$

$$\frac{dT_W(z)}{T_K(t) - T_W(z)} = - \frac{d(T_K(t) - T_W(z))}{T_K(t) - T_W(z)}; \quad \frac{k}{\dot{M}_W \cdot c_{p,W}} \int_0^A dA = - \int_{T_W(z=0)}^{T_W(z=L)} \frac{d(T_K(t) - T_W(z))}{T_K(t) - T_W(z)}$$

$$\ln \frac{T_K(t) - T_{W,aus}(t)}{T_K(t) - T_{W,ein}} = - \frac{k \cdot A}{\dot{M}_W \cdot c_{p,W}} = -NTU_W$$

$$T_{W,aus}(t) = T_K(t) - (T_K(t) - T_{W,ein}) \cdot \exp\{-NTU_W\} \quad (2)$$

In die Bilanzgleichung (1) einsetzen:

$$M_K \cdot c_{p,K} \cdot \frac{dT_K}{dt} = \dot{M}_W \cdot c_{p,W} \cdot (T_{W,ein} - T_K(t) + (T_K(t) - T_{W,ein}) \cdot \exp\{-NTU_W\}) \quad (3)$$

5) Mathematische Auflösung und Zahlenwert. (3) umformen:

$$M_K \cdot c_{p,K} \cdot \frac{dT_K}{dt} = \dot{M}_W \cdot c_{p,W} \cdot (T_{W,ein} - T_K(t)) \cdot (1 - \exp\{-NTU_W\})$$

Variablen trennen und integrieren:

$$\frac{M_K \cdot c_{p,K}}{\dot{M}_W \cdot c_{p,W}} \cdot \int_{T_{K,0}}^{T_K} \frac{dT_K}{T_{W,ein} - T_K(t)} = (1 - \exp\{-NTU_W\}) \cdot \int_0^t dt$$

$$- \frac{M_K \cdot c_{p,K}}{\dot{M}_W \cdot c_{p,W}} \cdot \ln \frac{T_{W,ein} - T_K}{T_{W,ein} - T_{K,0}} = (1 - \exp\{-NTU_W\}) \cdot t \quad (4)$$

$$T_K(t) = T_{W,ein} - (T_{W,ein} - T_{K,0}) \cdot \exp\left\{ \frac{\dot{M}_W \cdot c_{p,W}}{M_K \cdot c_{p,K}} \cdot t \cdot (\exp\{-NTU_W\} - 1) \right\} \quad \text{in (2) einsetzen:}$$

$$T_{W,aus}(t) = T_{W,ein} - (T_{W,ein} - T_{K,0}) \cdot \exp\left\{ \frac{\dot{M}_W \cdot c_{p,W}}{M_K \cdot c_{p,K}} \cdot t \cdot (\exp\{-NTU_W\} - 1) \right\} \cdot (1 - \exp\{-NTU_W\})$$

$$\text{Zahlenwerte: } NTU_W = 1,905; \quad T_K(t) = 20 \text{ °C} + 20 \text{ °C} \cdot \exp(-0,000306 \frac{1}{s} \cdot t) \quad (5)$$

$$T_{W,aus}(t) = 20 \text{ °C} + 17,02 \text{ °C} \cdot \exp(-0,000306 \frac{1}{s} \cdot t) \quad (6)$$

Aufgabeteil b). Gefragt: $t(T_K = 25 \text{ °C})$.

$$\text{Aus (4): } t = - \frac{M_K \cdot c_{p,K}}{\dot{M}_W \cdot c_{p,W}} \cdot \ln \frac{T_{W,ein} - T_K}{T_{W,ein} - T_{K,0}} \cdot \frac{1}{(1 - \exp\{-NTU_W\})}$$

$$\text{bei } T_K = 25 \text{ °C: } \quad t = 4524,1 \text{ s;}$$

$$M_w = \dot{M}_w \cdot t = 0,6 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot 4524,1 \text{ s} = 2714,5 \text{ kg}$$

Aufgabeteil c). Gefragt: $t(T_{w,aus} = 25^\circ\text{C})$.

$$\text{Aus (6): } t = \frac{\ln\{(T_{w,aus} - 20^\circ\text{C})/17^\circ\text{C}\}}{-0,000306 \frac{1}{\text{s}}} = \frac{\ln\{(25^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C})/17^\circ\text{C}\}}{-0,000306 \frac{1}{\text{s}}} = 3993,9 \text{ s} \approx 1 \text{ h } 6 \text{ min } 34 \text{ s}$$

Exkurs

Abschätzung zur Quasistationarität und der Vernachlässigung der Enthalpieinhalte der Kühltang

Daten eines typischen Kühltangrohres:

d_a	25	mm
S	1	mm
d_i	23	mm

Dichte von Wasser

$$\rho_w = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Länge der Kühltang mit 6 m^2 Mantelfläche: $L = \frac{A}{\pi \cdot d_a} = 76,39 \text{ m}$

(eine Windung mit Durchmesser 1 m benötigt 3,14 m Schlange, ergibt 24,3 Windungen; bei 50 mm Ganghöhe hat sie eine Gesamthöhe von 1,22 m; ein Kessel mit 2 m^3 Inhalt und 1,2 m Durchmesser hat die Höhe 1,77 m => eine realistische Länge für die Kühltang!)

Querschnittsfläche Kühltang innen (= Strömungsquerschnitt): $A_Q = \frac{\pi}{4} \cdot d_i^2 = 0,000415 \text{ m}^2$

Konti-Gleichung für Geschwindigkeit: $u = \frac{\dot{M}_w}{A_Q \cdot \rho_w} = 1,444 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Verweilzeit: $\tau_w = \frac{L}{u} = 52,9 \text{ s}$

Charakteristische Abkühlzeit des Kesselinhaltes:

$$T_K(t) = T_{w, \text{ein}} - (T_{w, \text{ein}} - T_{K,0}) \cdot \exp\left\{\frac{\dot{M}_w \cdot c_{p,w}}{M_K \cdot c_{p,K}} \cdot t \cdot (\exp\{-NTU_w\} - 1)\right\} = T_{w, \text{ein}} + \Delta T_{\text{ein}} \cdot \exp\left\{-\frac{t}{t_C}\right\}$$

$$t_C = \frac{M_K \cdot c_{p,K}}{\dot{M}_w \cdot c_{p,w} (1 - \exp\{-NTU_w\})} = 3263,45 \text{ s}$$

Verhältnis der Zeitskalen: $\frac{\tau_w}{t_C} = 0,0162 = 1,62 \%$ Quasistationarität gerechtfertigt

Innenvolumen der Kühltang: $V_w = L \cdot A_Q = 0,0317 \text{ m}^3$

Masse des Kühltangeninhalts: $M_w = V_w \cdot \rho_w = 31,7 \text{ kg}$

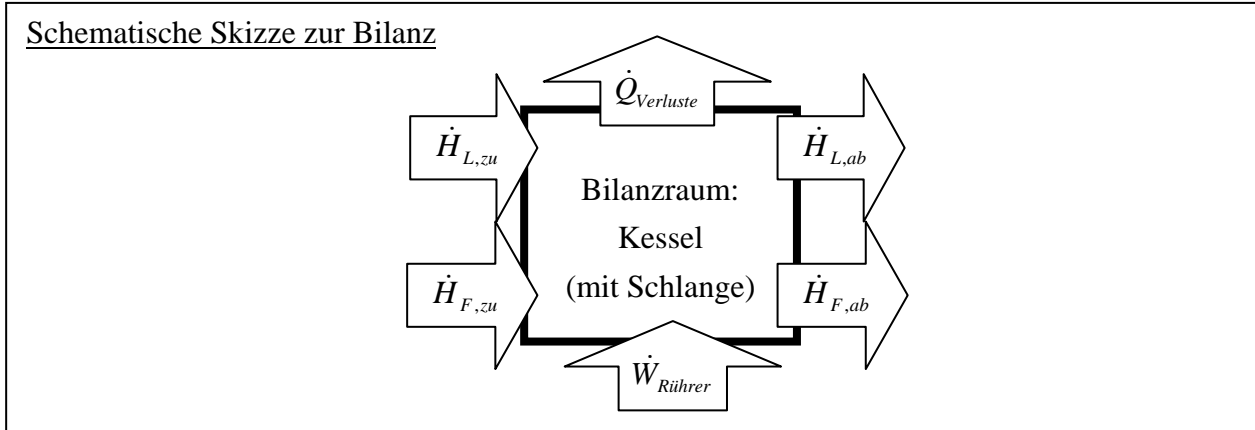
Maß für das Speichervermögen Kühltang: $M_w \cdot c_{p,w} = 133148 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$

Maß für das Speichervermögen Kesselinhalt: $M_K \cdot c_{p,K} = 7\,000\,000 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$

Verhältnis der beiden Speicher: $\frac{M_W \cdot c_{p,W}}{M_K \cdot c_{p,K}} = 0,019 = 1,9\% \quad \text{vernachlässigbar}$

Lösung Aufgabe 2

1) Beschreibung des Gegenstandes.



2) Erster Teil, Aufgabeteil a). Gefragt ist $T_L = T_{L,\infty}$

3) Grundgesetze. $\frac{dH}{dt} = \dot{Q}_{zu} - \dot{Q}_{ab} + \dot{W} + \dot{H}_{zu} - \dot{H}_{ab}$

$$\frac{dH}{dt} = 0; \quad \dot{H}_{zu} = \dot{M}_F \cdot c_{p,F} \cdot T_{F,ein} + \dot{M}_L \cdot c_{p,L} \cdot T_{L,ein}, \quad \dot{W} = \dot{W}_{Rührer}, \quad \dot{Q}_{zu} = 0$$

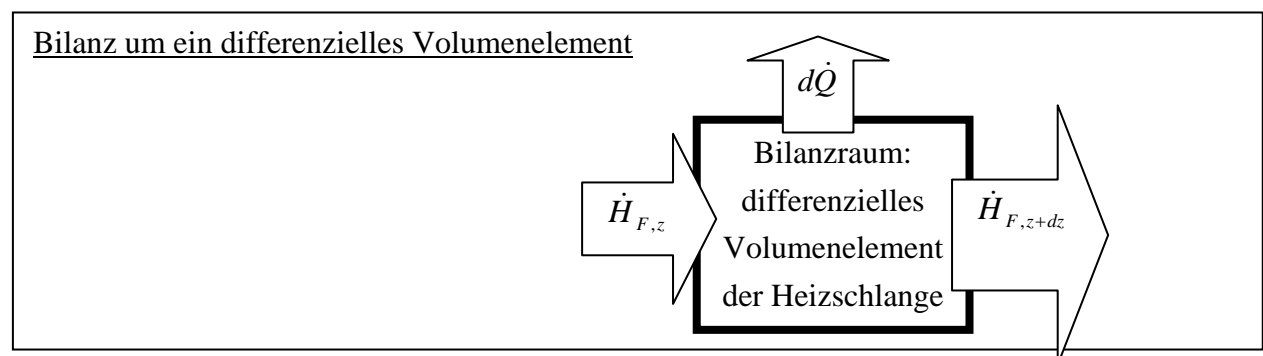
$$\dot{H}_{ab} = \dot{M}_F \cdot c_{p,F} \cdot T_{F,aus} + \dot{M}_L \cdot c_{p,L} \cdot T_L; \quad \dot{Q}_V = k_V \cdot A_V \cdot (T_L - T_U)$$

$$\dot{M}_F \cdot c_{p,F} \cdot T_{F,ein} + \dot{M}_L \cdot c_{p,L} \cdot T_{L,ein} - \dot{M}_F \cdot c_{p,F} \cdot T_{F,aus} - \dot{M}_L \cdot c_{p,L} \cdot T_L + \dot{W}_R - k_V \cdot A_V \cdot (T_L - T_U) = 0$$

$$\dot{M}_F \cdot c_{p,F} \cdot (T_{F,ein} - T_{F,aus}) + \dot{M}_L \cdot c_{p,L} \cdot (T_{L,ein} - T_L) + \dot{W}_R - k_V \cdot A_V \cdot (T_L - T_U) = 0 \quad (1)$$

4) Entwicklung nach den gesuchten Größen.

Unbekannt ist die Temperatur $T_{F,aus}$. Diese Temperatur wird aus der zusätzlichen Bilanz um die Heizschlange berechnet:



$$\frac{dH}{dt} = \dot{Q}_{zu} - \dot{Q}_{ab} + \dot{W} + \dot{H}_{zu} - \dot{H}_{ab}$$

$$\frac{dH}{dt} = 0 \text{ (stationärer Zustand); } \quad d\dot{Q}_{ab} = k_H \cdot dA_H \cdot (T_{F,z} - T_L)$$

$$\dot{H}_{F,z} = \dot{M}_F \cdot c_{p,F} \cdot T_{F,z}; \quad \dot{H}_{F,z+dz} = \dot{M}_F \cdot c_{p,F} \cdot T_{F,z+dz}$$

$$\dot{M}_F \cdot c_{p,F} \cdot (T_{F,z} - T_{F,z+dz}) - k_H \cdot dA_H \cdot (T_{F,z} - T_L) = 0$$

$$-\dot{M}_F \cdot c_{p,F} \cdot \frac{dT_F}{dz} - k_H \cdot \pi \cdot d_H \cdot (T_F - T_L) = 0; \quad -\dot{M}_F \cdot c_{p,F} \cdot dT_F - k_H \cdot dA_H \cdot (T_F - T_L) = 0$$

Variablen trennen und integrieren:

$$-\frac{dT_F}{T_F - T_L} = \frac{k_H \cdot dA_H}{\dot{M}_F \cdot c_{p,F}}; \quad -\int_{T_{F, \text{ein}}}^{T_{F, \text{aus}}} \frac{dT_F}{T_F - T_L} = \frac{k_H}{\dot{M}_F \cdot c_{p,F}} \cdot \int_0^{A_H} dA_H; \quad \ln \frac{T_{F, \text{aus}} - T_L}{T_{F, \text{ein}} - T_L} = -\frac{k_H \cdot A_H}{\dot{M}_F \cdot c_{p,F}}$$

$$T_{F, \text{aus}} = T_L + (T_{F, \text{ein}} - T_L) \cdot \exp\left(-\frac{k_H \cdot A_H}{\dot{M}_F \cdot c_{p,F}}\right) \quad (2)$$

diesen Wert in die Gesamtbilanz (1) einsetzen:

$$\dot{M}_F c_{p,F} \cdot (T_{F, \text{ein}} - T_L) \cdot [1 - \exp(-NTU_F)] + \dot{M}_L c_{p,L} \cdot (T_{L, \text{ein}} - T_L) + \dot{W}_R - k_V \cdot A_V \cdot (T_L - T_U) = 0$$

5) Mathematische Auflösung nach T_L :

$$\begin{aligned} & (\dot{M}_F \cdot c_{p,F} \cdot [1 - \exp(-NTU_F)] + \dot{M}_L \cdot c_{p,L} + k_V \cdot A_V) \cdot T_L = \\ & = \dot{W}_R + k_V \cdot A_V \cdot T_U + \dot{M}_F \cdot c_{p,F} \cdot T_{F, \text{ein}} \cdot [1 - \exp(-NTU_F)] + \dot{M}_L \cdot c_{p,L} \cdot T_{L, \text{ein}} \\ T_L & = \frac{\dot{W}_R + k_V \cdot A_V \cdot T_U + \dot{M}_F \cdot c_{p,F} \cdot T_{F, \text{ein}} \cdot [1 - \exp(-NTU_F)] + \dot{M}_L \cdot c_{p,L} \cdot T_{L, \text{ein}}}{\dot{M}_F \cdot c_{p,F} \cdot [1 - \exp(-NTU_F)] + \dot{M}_L \cdot c_{p,L} + k_V \cdot A_V} \end{aligned}$$

Aufgabeteil a) Zahlenwert: 45,3 °C

$$\text{Aufgabeteil b) } \dot{M}_L = 0 \quad T_L = \frac{\dot{W}_R + k_V \cdot A_V \cdot T_U + \dot{M}_F \cdot c_{p,F} \cdot T_{F, \text{ein}} \cdot [1 - \exp(-NTU_F)]}{\dot{M}_F \cdot c_{p,F} \cdot [1 - \exp(-NTU_F)] + k_V \cdot A_V} = 97,8 \text{ °C}$$

$\dot{M}_L = \infty$: Dividieren im Zähler und Nenner durch \dot{M}_L

$$T_L = \frac{\frac{\dot{W}_R + k_V \cdot A_V \cdot T_U + \dot{M}_F \cdot c_{p,F} \cdot T_{F, \text{ein}} \cdot [1 - \exp(-NTU_F)]}{\dot{M}_L \rightarrow \infty} + c_{p,L} \cdot T_{L, \text{ein}}}{\frac{\dot{M}_F \cdot c_{p,F} \cdot [1 - \exp(-NTU_F)] + k_V \cdot A_V}{\dot{M}_L \rightarrow \infty} + c_{p,L}}$$

$$T_L = \frac{c_{p,L} \cdot T_{L, \text{ein}}}{c_{p,L}} = 10 \text{ °C}$$

Zweiter Teil:

Bilanz aus dem Teil 1, nur instationär. Es ist zulässig, da die Bilanz um die Heizschlange quasistationär gerechnet wird (differenziell ist $T_{F, \text{aus}}$ keine Funktion der Zeit).

$$\dot{M}_F \cdot c_{p,F} \cdot (T_{F, \text{ein}} - T_L) \cdot [1 - \exp(-NTU_F)] + \dot{M}_L \cdot c_{p,L} \cdot (T_{L, \text{ein}} - T_L) + \dot{W}_R - k_V \cdot A_V \cdot (T_L - T_U) = \frac{dH}{dt}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dH_K}{dt} + \frac{dH_{\text{Stahlteile}}}{dt} + \underbrace{\frac{dH_{\text{Heizschlange}}}{dt}}_{\approx 0 \text{ gegenüber Kesselinhalt}} = (M_L c_{p,L} + M_S c_{p,S}) \frac{dT_L}{dt};$$

Einsetzen; Variablen trennen und integrieren:

$$\frac{\dot{W}_R + k_V A_V \cdot T_U + \dot{M}_F c_{p,F} \cdot T_{F, \text{ein}} \cdot [1 - \exp(-NTU_F)] + \dot{M}_L c_{p,L} \cdot T_{L, \text{ein}}}{\underbrace{\dot{M}_F c_{p,F} \cdot [1 - \exp(-NTU_F)] + \dot{M}_L c_{p,L} + k_V A_V}_{=T_{L,\infty}}} - T_L = \frac{M_L c_{p,L} + M_S c_{p,S}}{\underbrace{\dot{M}_F c_{p,F} \cdot [1 - \exp(-NTU_F)] + \dot{M}_L c_{p,L} + k_V A_V}_{=t_R}} \cdot \frac{dT_L}{dt}$$

$$T_{L,\infty} - T_L = t_R \cdot \frac{dT_L}{dt}; \quad \frac{dt}{t_R} = \frac{dT_L}{T_{L,\infty} - T_L}; \quad \frac{1}{t_R} \cdot \int_0^t dt = \int_{T_{L,A}}^{T_L} \frac{dT_L}{T_{L,\infty} - T_L}; \quad -\frac{t}{t_R} = \ln \frac{T_{L,\infty} - T_L}{T_{L,\infty} - T_{L,A}}$$

$$T_L = T_{L,\infty} - (T_{L,\infty} - T_{L,A}) \cdot \exp(-t/t_R) \quad (3)$$

Zahlenwerte: $t_R = 986 \text{ s}$ $T_L = 45,3 \text{ °C} - 35,3 \text{ °C} \cdot \exp(-t/986 \text{ s})$

Berechnen den zeitlichen Verlauf von $T_{F, \text{aus}}(t)$

$T_L(t)$ in (2) einsetzen: $NTU_F = 2$ $T_{F, \text{aus}} = 52,8 \text{ °C} - 30,5 \text{ °C} \cdot \exp(-t/986 \text{ s})$

Berechneter zeitlicher Temperaturverlauf:

$t, \text{ min}$	0	5	10	15	20	40	60	80	100	120
$t, \text{ s}$	0	300	600	900	1200	2400	3600	4800	6000	7200
$T_L \text{ °C}$	10,00	19,26	26,09	31,13	34,85	42,21	44,38	45,03	45,22	45,28
$T_{F, \text{aus}} \text{ °C}$	22,18	30,19	36,09	40,45	43,67	50,03	51,91	52,47	52,63	52,68

$$t = t_{99\%}$$

$$T_L - T_{L,\infty} = (T_{L,A} - T_{L,\infty}) \cdot (1 - 0,99) = (T_{L,A} - T_{L,\infty}) \cdot 0,01$$

$$\text{aus (3): } T_L - T_{L,\infty} = (T_{L,A} - T_{L,\infty}) \cdot \exp(-t_{99\%}/t_R) = (T_{L,A} - T_{L,\infty}) \cdot 0,01$$

$$\exp(-t_{99\%}/t_R) = 0,01; \quad \ln 0,01 = -t_{99\%}/t_R; \quad t_{99\%} = -t_R \cdot \ln 0,01 = 4541 \text{ s} = 1 \text{ h } 16 \text{ min}$$

Dritter Teil:

Aus dem Teil 1:

$$T_{L,\infty} = \frac{\dot{W}_R + k_V \cdot A_V \cdot T_U + \dot{M}_F \cdot c_{p,F} \cdot T_{F, \text{ein}} \cdot [1 - \exp(-NTU_F)] + \dot{M}_L \cdot c_{p,L} \cdot T_{L, \text{ein}}}{\dot{M}_F \cdot c_{p,F} \cdot [1 - \exp(-NTU_F)] + \dot{M}_L \cdot c_{p,L} + k_V \cdot A_V}$$

bei $T_{F, \text{ein}} = 250 \text{ °C}$ ist $T_{L,\infty} = 103,5 \text{ °C}$; oberhalb der Siedetemperatur \Rightarrow Teilverdampfung

Neue Bilanz: Berücksichtigung der Teilverdampfung, für stationären Zustand rechnen.

Im Kessel herrscht $T_{L,S}$, der Dampfanteil am austretenden Gesamtstrom beträgt X :

$$\dot{M}_F \cdot c_{p,F} \cdot (T_{F, \text{ein}} - T_{F, \text{aus}}) + \dot{M}_L \cdot c_{p,L} \cdot (T_{L, \text{ein}} - T_{L,S}) + \dot{W}_R - k_V \cdot A_V \cdot (T_{L,S} - T_U) - \dot{M}_L \cdot X \cdot \Delta h_V(T_{L,S}) = 0$$

Berechnung von $T_{F, \text{aus}}$ aus Gleichung 2 für $T_L = T_{L,S}$:

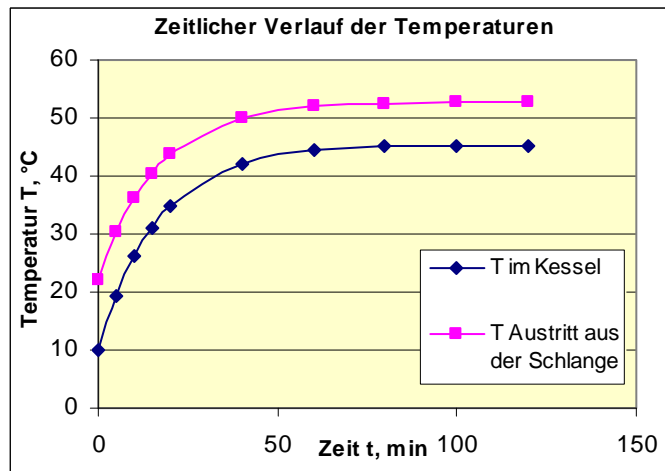
$$T_{F,aus} = T_{L,S} + (T_{F,ein} - T_{L,S}) \cdot \exp(-NTU_F) = 120,3\text{ }^\circ\text{C}$$

Auflösen nach dem Dampfanteil:

$$X = \frac{\dot{M}_F \cdot c_{p,F} \cdot (T_{F,ein} - T_{F,aus}) + \dot{M}_L \cdot c_{p,L} \cdot (T_{L,ein} - T_{L,S}) + \dot{W}_R - k_V \cdot A_V \cdot (T_{L,S} - T_U)}{\dot{M}_L \cdot \Delta h_V(T_{L,S})} = 1,155\%$$

Ein vernachlässigbarer Anteil verdampft, es kann also ein stationärer Zustand erreicht werden. Der Verlauf der Flüssigkeitstemperatur bekommt beim Erreichen der Siedetemperatur einen Knick, dann bleibt auch die Austrittstemperatur des Kühlwassers konstant.

Diagramme



Temperaturen entlang der Rohrschlange:

