Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität · gegründet 1825

Institut für
Thermische Verfahrenstechnik

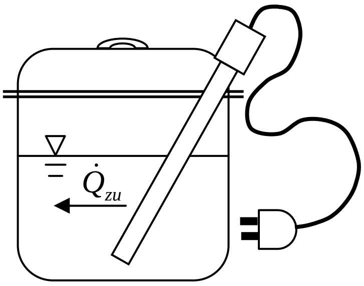
Prof. Dr.-Ing. Matthias Kind **Dr.-Ing. Thomas Wetzel**

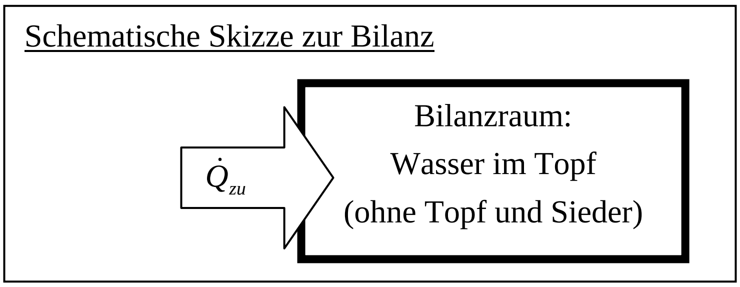
Wärmeübertragung I

Lösung zur 2. Übung (Bilanz)

Lösung Aufgabe 1.

1) Beschreibung des Gegenstandes (Skizze).





2) Gefragt ist $T_W(t)$ und t (bis $T_W = T_S = 100\,°\mathrm{C}$).

3) Grundgesetze: $\boxed{\dfrac{dH}{dt} = \dot{Q}_{zu} - \dot{Q}_{ab} + \dot{W} + \dot{H}_{zu} - \dot{H}_{ab}}$

$$\frac{dH}{dt} = M_W \cdot c_{p,W} \cdot \frac{dT_W}{dt} = V_W \cdot \rho_W \cdot c_{p,W} \cdot \frac{dT_W}{dt}; \qquad \dot{Q}_{ab} = \dot{H}_{zu} = \dot{H}_{ab} = \dot{W} = 0; \qquad \dot{Q}_{zu} = ???$$

Bilanz um Tauchsieder: $\dot{Q}_{zu} = \dot{W}_{el} = 1000\,\mathrm{W}$

4) Entwicklung nach den gesuchten Größen. Alles in die Gleichung einsetzen:

$$V_W \cdot \rho_W \cdot c_{p,W} \cdot \frac{dT_W}{dt} = \dot{W}_{el}$$

Variablen trennen und integrieren:

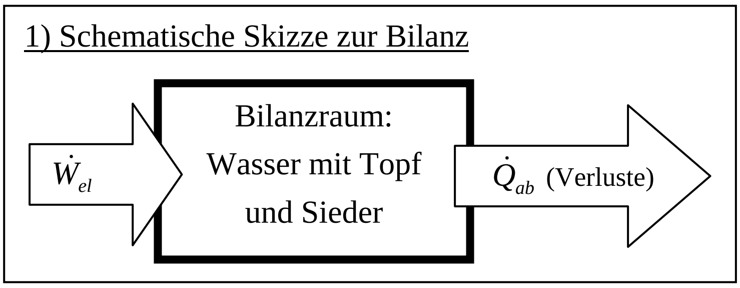
$$dT_W = \frac{\dot{W}_{el}}{V_W \cdot \rho_W \cdot c_{p,W}} \cdot dt \qquad \int_{T_A}^{T_W} dT_W = \frac{\dot{W}_{el}}{V_W \cdot \rho_W \cdot c_{p,W}} \cdot \int_0^t dt$$

5) Mathematische Auflösung und Zahlenwert.

$$T_W = T_A + \frac{\dot{W}_{el}}{V_W \cdot \rho_W \cdot c_{p,W}} \cdot t = 14\,°\mathrm{C} + \frac{1000\,\mathrm{W}}{10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 4{,}19 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg \cdot K}}} \cdot t = 14\,°\mathrm{C} + 0{,}239\,\tfrac{°\mathrm{C}}{\mathrm{s}} \cdot t$$

t (bis T = 100 °C): $100\,°\mathrm{C} = 14\,°\mathrm{C} + 0{,}239\,\tfrac{°\mathrm{C}}{\mathrm{s}} \cdot t$; $\quad t = \dfrac{100\,°\mathrm{C} - 14\,°\mathrm{C}}{0{,}239\,\frac{°\mathrm{C}}{\mathrm{s}}} = 359{,}8\,\mathrm{s} \approx 6\,\mathrm{min}$

Aufgabe 3 Teil 1.



2) Gefragt ist wieder $T_W(t)$ und t (bis $T_W = T_S = 100\,°C$).

3) Grundgesetze: $\boxed{\dfrac{dH}{dt} = \dot{Q}_{zu} - \dot{Q}_{ab} + \dot{W} + \dot{H}_{zu} - \dot{H}_{ab}}$

$$\frac{dH}{dt} = \left(M_W \cdot c_{p,W} + M_S \cdot c_{p,S}\right) \cdot \frac{dT_W}{dt} = \left(V_W \cdot \rho_W \cdot c_{p,W} + M_S \cdot c_{p,S}\right) \cdot \frac{dT_W}{dt}$$

$$\dot{Q}_{zu} = \dot{H}_{zu} = \dot{H}_{ab} = 0\,; \qquad \dot{W}_{el} = 1000\,\text{W}\,; \qquad \dot{Q}_{ab} = \dot{Q}_V = k_V \cdot A_V \cdot (T_W - T_U)$$

4) Entwicklung nach den gesuchten Größen. Alles in die Gleichung einsetzen:

$$\left(V_W \cdot \rho_W \cdot c_{p,W} + M_S \cdot c_{p,S}\right) \cdot \frac{dT_W}{dt} = \dot{W}_{el} - k_V \cdot A_V \cdot (T_W - T_U)$$

Variablen trennen und integrieren:

$$\frac{V_W \cdot \rho_W \cdot c_{p,W} + M_S \cdot c_{P,S}}{k_V \cdot A_V} \cdot \frac{dT_W(t)}{dt} = \frac{\dot{W}_{el}}{k_V \cdot A_V} + T_U - T_W(t)$$

$$\int_{T_A}^{T_W} \frac{dT_W(t)}{\dfrac{\dot{W}_{el}}{k_V \cdot A_V} + T_U - T_W(t)} = \frac{k_V \cdot A_V}{V_W \cdot \rho_W \cdot c_{p,W} + M_S \cdot c_{P,S}} \cdot \int_0^t dt$$

$$-\ln \frac{\dfrac{\dot{W}_{el}}{k_V \cdot A_V} + T_U - T_W(t)}{\dfrac{\dot{W}_{el}}{k_V \cdot A_V} + T_U - T_A} = \frac{k_V \cdot A_V}{V_W \cdot \rho_W \cdot c_{p,W} + M_S \cdot c_{P,S}} \cdot t$$

$$T_W(t) = \frac{\dot{W}_{el}}{k_V \cdot A_V} + T_U - \left(\frac{\dot{W}_{el}}{k_V \cdot A_V} + T_U - T_A\right) \cdot \exp\left(-\frac{k_V \cdot A_V}{V_W \cdot \rho_W \cdot c_{p,W} + M_S \cdot c_{P,S}} \cdot t\right)$$

5) Mathematische Auflösung und Zahlenwert.

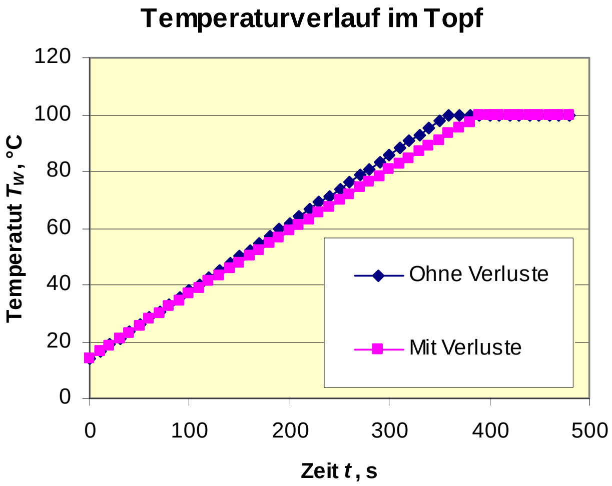
$$T_W(t) = \frac{1000\,\text{W}}{10\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot\text{K}} \cdot 0{,}1\,\text{m}^2} + 20\,°\text{C} -$$
$$\left(\frac{1000\,\text{W}}{10\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot\text{K}} \cdot 0{,}1\,\text{m}^2} + 20\,°\text{C} - 14\,°\text{C}\right) \cdot \exp\left(-\frac{10\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot\text{K}} \cdot 0{,}1\,\text{m}^2}{10^{-3}\,\text{m}^3 \cdot 10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 4{,}19 \cdot 10^3\,\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}} + 0{,}4\,\text{kg} \cdot 0{,}5 \cdot 10^3\,\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}} \cdot t\right)$$

$$T_W(t) = 1020\,°\text{C} - 1006\,°\text{C} \cdot \exp(-2{,}278 \cdot 10^{-4}\,\tfrac{1}{\text{s}} \cdot t)$$

t (bis $T_W = T_S = 100\,°\text{C}$): $100\,°\text{C} = 1020\,°\text{C} - 1006\,°\text{C} \cdot \exp(-2{,}278 \cdot 10^{-4}\,\tfrac{1}{\text{s}} \cdot t) \quad \Rightarrow$

$$t = \ln \frac{100\,°\text{C} - 1020\,°\text{C}}{-1006\,°\text{C}} \cdot \frac{1}{-2{,}278 \cdot 10^{-4}\,\frac{1}{\text{s}}} = 391{,}3\,\text{s} \approx 6{,}5\,\text{min}$$

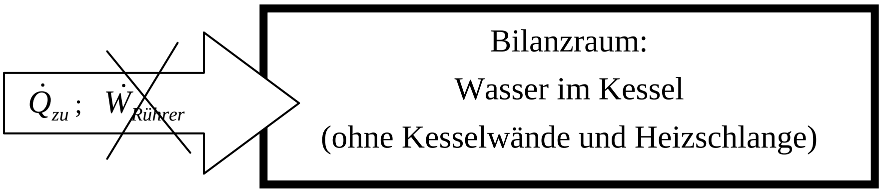
6) Diskussion



Lösung Aufgabe 2.

1) Beschreibung des Gegenstandes (Skizze).

Schematische Skizze zur Bilanz



2) Gefragt ist $T_L(t)$

3) Grundgesetze: $\boxed{\dfrac{dH}{dt} = \dot{Q}_{zu} - \dot{Q}_{ab} + \dot{W} + \dot{H}_{zu} - \dot{H}_{ab}}$

$$\frac{dH}{dt} = M_L \cdot c_{p,L} \cdot \frac{dT_L}{dt}; \qquad \dot{Q}_{zu} = \alpha \cdot A \cdot (T_O - T_L)$$

$\dot{Q}_{ab} = \dot{H}_{zu} = \dot{H}_{ab} = 0$; $\dot{W}_{Rührer} = 0$ (wird vernachlässigt)

4) Entwicklung nach den gesuchten Größen. Alles in die Gleichung einsetzen:

$$M_L \cdot c_{p,L} \cdot \frac{dT_L}{dt} = \alpha \cdot A \cdot (T_O - T_L)$$

Variablen trennen und integrieren:

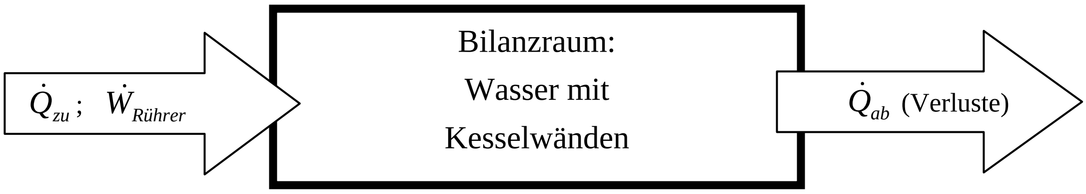
$$\int_{T_A}^{T_L} \frac{dT_L}{T_O - T_L} = \frac{\alpha \cdot A}{M_L \cdot c_{p,L}} \cdot \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad -\ln \frac{T_O - T_L}{T_O - T_A} = \frac{\alpha \cdot A}{M_L \cdot c_{p,L}} \cdot t$$

5) Mathematische Auflösung

$$T_L = T_O - (T_O - T_A) \exp\left[\frac{-\alpha \cdot A}{M_L \cdot c_{p,L}} \cdot t\right]$$

Aufgabe 3 Teil 2.

1) Schematische Skizze zur Bilanz



Enthalpie der Heizschlange ändert sich nicht (innen und außen $T = \text{const.}$), daher zählt sie nicht zum Bilanzraum und die zugeführte Wärme ist analog zu Aufgabe 2

2) Gefragt ist wieder $T_L(t)$

3) Grundgesetze: $\boxed{\dfrac{dH}{dt} = \dot{Q}_{zu} - \dot{Q}_{ab} + \dot{W} + \dot{H}_{zu} - \dot{H}_{ab}}$

$$\frac{dH}{dt} = \left(M_L \cdot c_{p,L} + M_S \cdot c_{p,S}\right) \cdot \frac{dT_L}{dt}; \qquad \dot{Q}_{zu} = \alpha \cdot A \cdot \left(T_O - T_L\right); \qquad \dot{Q}_{ab} = k_V \cdot A_V \cdot \left(T_L - T_U\right)$$

$$\dot{H}_{zu} = \dot{H}_{ab} = 0; \qquad \dot{W}_{Rührer} = \dot{W}_{el}$$

4) Entwicklung nach den gesuchten Größen. Alles in die Gleichung einsetzen:

$$\left(M_L \cdot c_{p,L} + M_S \cdot c_{p,S}\right) \cdot \frac{dT_L}{dt} = \dot{W}_{el} + \alpha \cdot A \cdot \left(T_O - T_L\right) - k_V \cdot A_V \cdot \left(T_L - T_U\right)$$

Variablen trennen und integrieren:

$$\left(M_L \cdot c_{p,L} + M_S \cdot c_{p,S}\right) \cdot \frac{dT_L}{dt} = \left[\dot{W}_{el} + \alpha \cdot A \cdot T_O + k_V \cdot A_V \cdot T_U\right] - \left[\alpha \cdot A + k_V \cdot A_V\right] \cdot T_L$$

$$\int_{T_A}^{T_L} \frac{dT_L}{\dfrac{\dot{W}_{el} + \alpha \cdot A \cdot T_O + k_V \cdot A_V \cdot T_U}{\alpha \cdot A + k_V \cdot A_V} - T_L} = \frac{\alpha \cdot A + k_V \cdot A_V}{M_L \cdot c_{p,L} + M_S \cdot c_{p,S}} \int_0^t dt$$

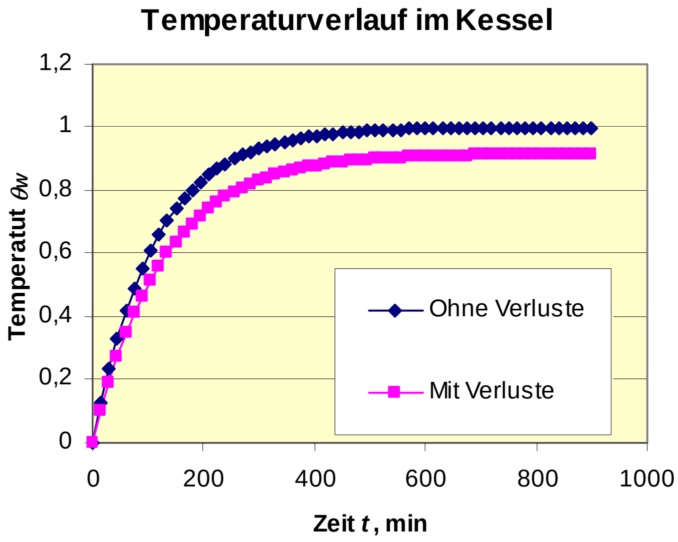
$$-\ln \frac{\dfrac{\dot{W}_{el} + \alpha \cdot A \cdot T_O + k_V \cdot A_V \cdot T_U}{\alpha \cdot A + k_V \cdot A_V} - T_L}{\dfrac{\dot{W}_{el} + \alpha \cdot A \cdot T_O + k_V \cdot A_V \cdot T_U}{\alpha \cdot A + k_V \cdot A_V} - T_A} = \frac{\alpha \cdot A + k_V \cdot A_V}{M_L \cdot c_{p,L} + M_S \cdot c_{p,S}} \cdot t$$

5) Mathematische Auflösung

$$T_L(t) = \frac{\dot{W}_{el} + \alpha \cdot A \cdot T_O + k_V \cdot A_V \cdot T_U}{\alpha \cdot A + k_V \cdot A_V} - \left[\frac{\dot{W}_{el} + \alpha \cdot A \cdot T_O + k_V \cdot A_V \cdot T_U}{\alpha \cdot A + k_V \cdot A_V} - T_A\right] \cdot \exp\left[-\frac{\alpha \cdot A + k_V \cdot A_V}{M_L \cdot c_{p,L} + M_S \cdot c_{p,S}} \cdot t\right]$$

6) Diskussion

Normierung Temperatur: $\theta = \dfrac{T - T_A}{T_O - T_A}$, irgendwelche Zahlenwerte (z.B. aus Aufgabe 3 Teil 1), Vernachlässigung der Rührerleistung (da klein gegenüber den andere Termen):


Temperaturverlauf im Kessel
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
Temperatut ϑ_W
0
200
400
600
800
1000
Zeit t, min
Ohne Verluste
Mit Verluste