Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität · gegründet 1825
Institut für
Thermische Verfahrenstechnik
Prof. Dr.-Ing. Matthias Kind **Dr.-Ing. Thomas Wetzel**

Wärmeübertragung I

Lösung zur 1. Übung (Einleitung: Bilanz, Kinetik)

Die innere Energie *U* ist eine extensive Zustandsgröße, die den Energiegehalt einer Materiemenge beschreibt, der über ihre geordnete kinetische und potenzielle Energie des Schwerpunktes hinausgeht. Die Innere Energie besteht aus:

- Physikalisch-thermischem Anteil (Thermische Energie) E_{th}
- Chemischem Anteil (Bindungsenergie der Moleküle) E_{ch}
- Kernphysikalischem Anteil (Energie der Atomkerne) E_{ak}
- Magnetischen und elektrischen Wechselwirkungen E_{em}

Bei der Wärmeübertragung handelt es sich um die Veränderung des thermischen Anteils der inneren Energie. Thermische Energie ist definiert als $E_{th} = M \cdot c \cdot T$ (c – „Speicherkapazität")

Erster Hauptsatz (Energieerhaltung): Innere Energie kann sich nur durch den Transport von Energie (in Form von Arbeit und/oder Wärme) über die Grenze des Systems ändern:

$$dU = dQ + dW_{Mechanisch} + dW_{Sonstige}$$

$W_{Mechanisch} = -F \cdot s$ - Arbeit; differentiell: $dW = -F \cdot ds = -p \cdot A \cdot ds = -p \cdot dV$ (Volumenarbeit)

somit $dU = dQ - pdV + dW_{Sonstige}$ und umgeformt:

$$\boxed{dU + pdV = dQ + dW_{Sonstige}};$$

$dH = dU + pdV + Vdp = dU + pdV$ (wenn $p = \text{const}$)

$$\boxed{dH = dQ + dW_{Sonstige}}$$

Wärme *Q* ist eine Prozessgröße, die die über die Systemgrenze hinweg transportierte thermische Energie beschreibt. Wärme wird immer vom System mit höherer Temperatur ins System mit geringerer Temperatur übertragen. Die Systeme müssen sich dazu in thermischem Kontakt befinden. Die Änderung der inneren Energie (bzw. Enthalpie) durch Wärmetransport ist meist mit einer Temperaturänderung verbunden (ohne Phasenumwandlung o.ä.):

$dH = M \cdot c_p \cdot dT$ (wenn $M = \text{const.}$; $\underline{c_p}$ – isobar)

Wenn dem System ein Massenstrom zugeführt wird, und/oder ein Massenstrom das System verlässt, kommen in die Bilanzgleichung zusätzliche Terme dazu:

(da Energieerhaltung): $dH = dQ_{zu} - dQ_{ab} + dW_{Sonst.} + dH_{zu} - dH_{ab}$

oder Ströme (pro Zeiteinheit): $\boxed{\frac{dH}{dt} = \dot{Q}_{zu} - \dot{Q}_{ab} + \dot{W} + \dot{H}_{zu} - \dot{H}_{ab}}$

oder integral (über die Zeit): $\Delta H = Q_{zu} - Q_{ab} + W + H_{zu} - H_{ab}$

im stationären Fall: $0 = \dot{Q}_{zu} - \dot{Q}_{ab} + \dot{W} + \dot{H}_{zu} - \dot{H}_{ab}$

In der Form von

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = \dot{Q}_{zu} - \dot{Q}_{ab} + \dot{W} + \dot{H}_{zu} - \dot{H}_{ab}\left(= M \cdot c_p \cdot \frac{dT}{dt} - \text{falls } M, c_p = \text{const.}\right)}$$

ist der erste Hauptsatz („Energiebilanz“) der grundlegende Ansatz für die Lösung jeder Aufgabe. Die Vorgehensweise bei der Lösung ist wie folgt:

1) ***Beschreibung des Gegenstandes***.

Hier wird zuerst der Bilanzraum gewählt. Das Problem wird in Form einer Skizze (dazu gehören alle Wärmeströme, die in den Bilanzraum hinein gehen oder den Bilanzraum verlassen, sowie alle inneren Quellen und Senken) schematisch dargestellt. Das ist der wichtigste Teil der Lösung. Entscheidend ist es, den Bilanzraum richtig zu wählen und die Energieströme vollständig darzustellen.

2) ***Formulierung der Frage***.

Welche Größe (ggf. Größen) ist (ggf. sind) zu berechnen?

3) ***Grundgesetze***.

$$\frac{dH}{dt} = \dot{Q}_{zu} - \dot{Q}_{ab} + \dot{W} + \dot{H}_{zu} - \dot{H}_{ab}\left(= M \cdot c_p \cdot \frac{dT}{dt}\right)$$

Jede Lösung fängt mit diesem Gesetz an. Zunächst ist festzustellen, ob der Prozess stationär ($\frac{dH}{dt} = 0$) oder instationär abläuft. Dann sind die zugeführten und die abgeführten Energieströme in die Gleichung einzusetzen. Die Enthalpieänderung $\frac{dH}{dt}$ ist durch Wärmekapazität, Masse und Temperatur explizit auszudrücken.

4) ***Entwicklung nach gesuchten Größen***.

Durch weitere Gleichungen (Kinetik, Massenbilanz, weitere Energiebilanzen, ...) sind die noch fehlenden Größen zu berechnen. Die gesuchte Größe soll die einzige Unbekannte sein.

5) ***Mathematische Auflösung und Zahlenwert***.

Durch Integration und andere mathematische Methoden werden die Gleichungen nach der gesuchten Größe aufgelöst. Die gegebenen Werte sind einzusetzen, und der Zahlenwert zu berechnen.

6) ***Diskussion***.

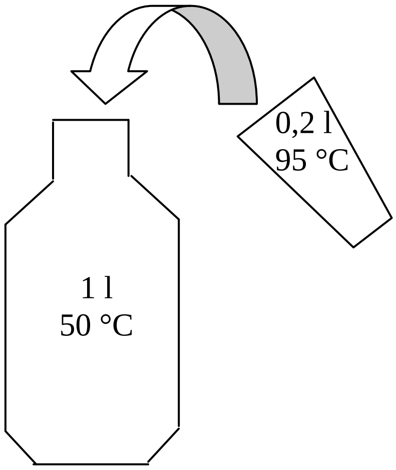
Wenn nichts anderes gefragt wird, gehört zur Diskussion die Überlegung, ob die berechneten Zahlenwerte physikalisch sinnvoll sind. So lassen sich rechnerische Fehler vermeiden.

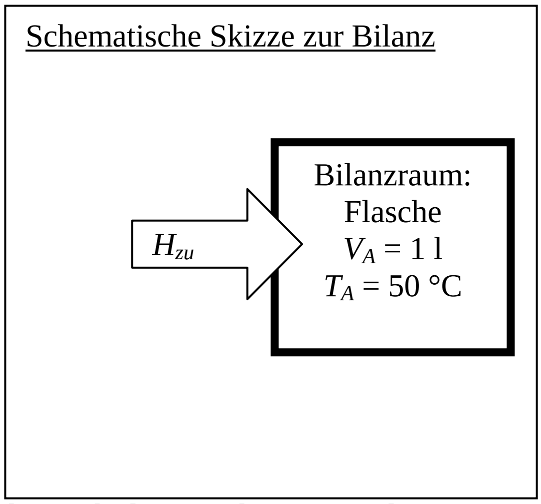
1. Aufgabe

In einer Thermosflasche befindet sich 1 l Wasser bei einer Temperatur von 50 °C. In die Flasche wird ein Glas Wasser (0,2 l) mit der Temperatur 95 °C zugegeben. Zu berechnen: Temperatur des Wassers nach dem der Inhalt gut durchmischt wurde. Wärmekapazität und Dichte von Wasser dürfen als temperaturunabhängig betrachtet werden.

Lösungsweg:

1) Beschreibung des Gegenstandes.





2) Formulierung der Frage. Gefragt ist T_E in der Flasche nach der Zugabe von 0,2 l Wasser mit Temperatur 95 °C.

3) Grundgesetze: $\boxed{\frac{dH}{dt} = \dot{Q}_{zu} - \dot{Q}_{ab} + \dot{W} + \dot{H}_{zu} - \dot{H}_{ab}}$ ***damit fängt jede Bilanz an!***

Da wir eigentlich keine zeitlichen Verläufe rechnen wollen, können wir diese Bilanz direkt in folgender integraler Form umschreiben: $\Delta H = Q_{zu} - Q_{ab} + W + H_{zu} - H_{ab}$

$\Delta H = \Delta(M \cdot c_p \cdot T) = \Delta(V \cdot \rho \cdot c_p \cdot T) = (V_E \cdot \rho \cdot c_p \cdot T_E) - (V_A \cdot \rho \cdot c_p \cdot T_A)$ - Enthalpieänderung

$H_{zu} = M_{zu} \cdot c_p \cdot T_{zu} = V_{zu} \cdot \rho \cdot c_p \cdot T_{zu}$ - mit Wasser zugeführte Wärme

$Q_{zu} = Q_{ab} = W = H_{ab} = 0$ (erläutern!)

4) Entwicklung nach gesuchten Größen: alle Größen in die Bilanz einsetzen

$(V_E \cdot \rho \cdot c_p \cdot T_E) - (V_A \cdot \rho \cdot c_p \cdot T_A) = V_{zu} \cdot \rho \cdot c_p \cdot T_{zu} - 0$

V_E - aus Massenbilanz: $M_E = M_A + M_{zu}$; $V_E \rho = V_A \rho + V_{zu} \rho$; da $\rho = \text{const.}$: $V_E = V_A + V_{zu}$

5) Mathematische Auflösung und Zahlenwert: $\rho \cdot c_p \cdot (V_E \cdot T_E - V_A \cdot T_A) = V_{zu} \rho \cdot c_p \cdot T_{zu} \Rightarrow$

$$T_E = \frac{V_A \cdot \rho \cdot c_p \cdot T_A + V_{zu} \cdot \rho \cdot c_p \cdot T_{zu}}{\rho \cdot c_p \cdot (V_A + V_{zu})} \Rightarrow T_E = \frac{1\,\text{l} \cdot 50\,°\text{C} + 0{,}2\,\text{l} \cdot 95\,°\text{C}}{1\,\text{l} + 0{,}2\,\text{l}} = 57{,}5\,°\text{C}$$

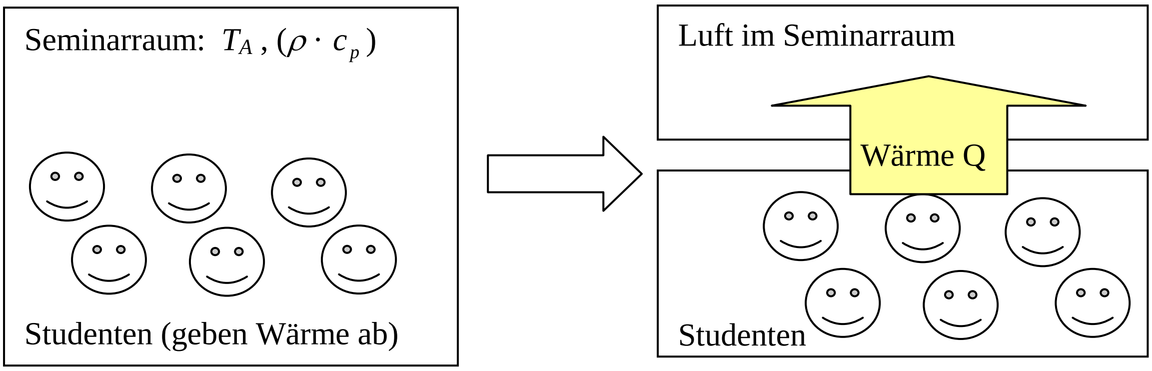
6) Diskussion: Was passiert, wenn Dichte und Wärmekapazität nicht konstant sind?

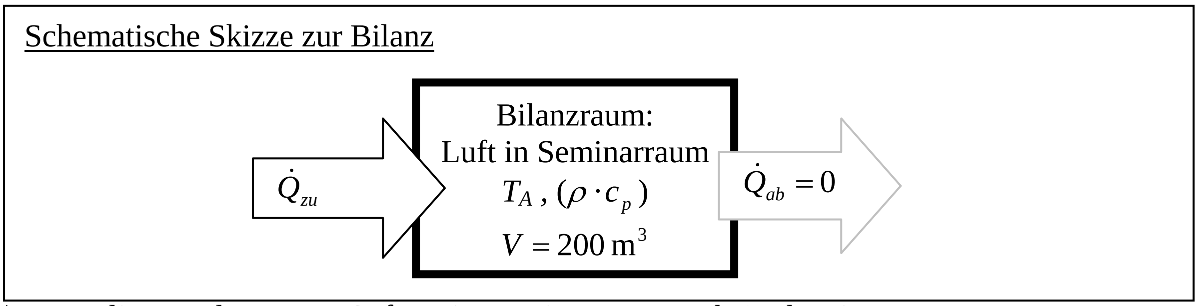
2. Aufgabe

Die Wärmeabgabe des Menschen ist ca. 100 W. Zu berechnen: Die Temperatur im Raum ($200\,\mathrm{m}^3$, 10 Studenten, 1,5 h) nach der Übung, wenn der Raum als adiabat betrachtet wird. Die Temperatur am Anfang der Übung beträgt 20 °C, die volumetrische Wärmekapazität der Luft $\rho \cdot c_p = 1 \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{m^3 \cdot K}}$.

<u>Lösungsweg</u>:

1) Beschreibung des Gegenstandes. Wichtig: Bilanzraum richtig wählen!





2) Formulierung der Frage. Gefragt ist T_E im Raum nach 1,5 h. $\Delta T = T_E - T_A$

3) Grundgesetze: $\boxed{\dfrac{dH}{dt} = \dot{Q}_{zu} - \dot{Q}_{ab} + \dot{W} + \dot{H}_{zu} - \dot{H}_{ab} = M \cdot c_p \cdot \dfrac{dT}{dt}}$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d(M \cdot c_p \cdot T)}{dt} = V \cdot (\rho \cdot c_p) \frac{dT}{dt}$$

$\dot{Q}_{zu}$ - Wärmeabgabe von 10 Studenten, $\dot{Q}_{zu} = 10 \cdot 100\,\mathrm{W} = 1000\,\mathrm{W}$

$\dot{Q}_{ab}$ - Raum adiabat, keine Verluste, $\dot{Q}_{ab} = 0$; $\dot{W} = \dot{H}_{zu} = \dot{H}_{ab} = 0$

4) Entwicklung nach gesuchten Größen: Alles in die Gleichung einsetzen: $V \cdot \rho \cdot c_p \dfrac{dT}{dt} = \dot{Q}_{zu}$

5) Mathematische Auflösung und Zahlenwert: Variablen trennen: $\dot{Q}_{zu} \cdot dt = V \cdot (\rho \cdot c_p) \cdot dT$

Integration: $\dot{Q}_{zu} \displaystyle\int_{t=0}^{t=1{,}5\,\mathrm{h}} dt = V \cdot (\rho \cdot c_p) \cdot \int_{T_A}^{T_E} dT$; $\quad \dot{Q}_{zu} \cdot 1{,}5\,\mathrm{h} = V \cdot (\rho \cdot c_p) \cdot (T_E - T_A)$

$$(T_E - T_A) = \frac{\dot{Q}_{zu} \cdot 1{,}5\,\mathrm{h}}{V \cdot (\rho \cdot c_p)} = \frac{1000\,\mathrm{W} \cdot 1{,}5\,\mathrm{h}}{200\,\mathrm{m}^3 \cdot 1 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3 \cdot K}} \cdot \frac{3600\,\mathrm{s}}{1\mathrm{h}} = 27\,\mathrm{K}; \quad T_E = T_A + 27\,\mathrm{K} = 47°C$$

6) Diskussion: Wieso wird die Temperatur in der Realität nicht so hoch?

Kinetik

Eine Bilanz zeigt, wie viel Wärme von einem System zu einem anderen übertragen wird. Die Kinetik zeigt, wie schnell diese Wärme übertragen wird. Drei Einflussgrößen: ΔT; A; α.

Form des kinetischen Ansatzes:

$$\dot{Q} = \alpha \cdot A \cdot (T_1 - T_2)$$

Der kinetische Ansatz besteht aus drei Faktoren, die alle die Geschwindigkeit der Wärmeübertragung bestimmen. Zum Einen ist der Temperaturunterschied notwendig, damit die Wärmeübertragung überhaupt stattfinden kann. Je größer der Temperaturunterschied, desto schneller ist die Wärmeübertragung. Des Weiteren ist die Kontaktoberfläche von Bedeutung. Und drittens bestimmt der Wärmeübergangskoeffizient, wie viel Wärme in jedem einzelnen Fall pro $1\,\mathrm{m}^2$ Oberfläche bei einer Temperaturdifferenz von 1 K übertragen wird. Der Wärmeübergangskoeffizient hängt von vielen Bedingungen ab (z.B. ob Flüssigkeit, Gas oder Festkörper, Strömungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit, Verschmutzung der Oberfläche, etc.).

3. Aufgabe

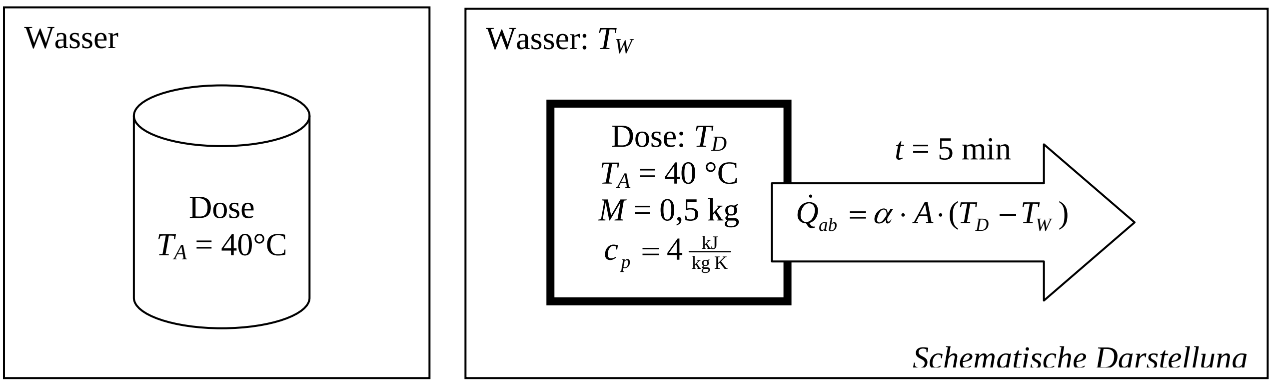
Eine Getränkedose ($M = 0{,}5\,\mathrm{kg}$; $c_p = 4\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg \cdot K}}$; $A_{ges} = 0{,}03\,\mathrm{m}^3$) hat eine Temperatur von 40 °C und wird 5 min lang im Wasser abgekühlt. Der Wärmeübergangskoeffizient von der Dosenoberfläche zum Wasser beträgt $500\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 \cdot K}}$. Das Wasser und das Getränk sind beide vollständig durchmischt. Das Wasser wird durch die Wärmeabgabe der Dose nicht erwärmt.

Zu berechnen ist die Temperatur des Doseninhalts

1. falls $T_{Wasser} = 10\,°\mathrm{C}$
2. falls $T_{Wasser} = 25\,°\mathrm{C}$
3. falls $T_{Wasser} = 10\,°\mathrm{C}$, aber die Dose nur bis zur Hälfte im Wasser steht (oben adiabat)
4. falls die Dose in der Luft abgekühlt wird ($T_{Luft} = 10\,°\mathrm{C}$, Wärmeübergangskoeffizient Dose → Luft beträgt $50\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 \cdot K}}$)

Lösungsweg

1. Beschreibung des Gegenstandes. Bilanzraum: Dose.



2) Formulierung der Frage. Gefragt ist T_E in der Dose nach 5 min

3) Grundgesetze: $$\boxed{\frac{dH}{dt} = \dot{Q}_{zu} - \dot{Q}_{ab} + \dot{W} + \dot{H}_{zu} - \dot{H}_{ab}}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d(M \cdot c_p \cdot T_D)}{dt}; \quad \frac{dH}{dt} = M \cdot c_p \frac{dT_D}{dt} \quad (\text{da } M = \text{const.})$$

$\dot{Q}_{ab} = \alpha \cdot A \cdot (T_D - T_W)$ - Wärmeabgabe an Wasser

$\dot{Q}_{zu} = 0$ - Keine Wärmezufuhr; $\dot{W} = \dot{H}_{zu} = \dot{H}_{ab} = 0$

4) Entwicklung nach gesuchten Größen: alle Größen in die Gleichung einsetzten

$M \cdot c_p \dfrac{dT_D}{dt} = -\alpha \cdot A \cdot (T_D - T_W)$ Integration erforderlich.

5) Mathematische Auflösung und Zahlenwert:

Trennung der Variablen liefert zunächst: $$-\frac{\alpha \cdot A}{M \cdot c_p} \cdot dt = \frac{dT_D}{T_D - T_W}.$$

Integration: $$-\frac{\alpha \cdot A}{M \cdot c_p} \cdot \int_{t=0}^{t} dt = \int_{T_A}^{T_E} \frac{dT_D}{T_D - T_W} = \int_{T_A}^{T_E} \frac{d(T_D - T_W)}{T_D - T_W}$$

$$-\frac{\alpha \cdot A}{M \cdot c_p} \cdot t = \ln \frac{T_E - T_W}{T_A - T_W} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_E - T_W}{T_A - T_W} = \exp\left(-\frac{\alpha \cdot A}{M \cdot c_p} \cdot t\right)$$

$$T_E = T_W + (T_A - T_W) \cdot \exp\left(-\frac{\alpha \cdot A}{M \cdot c_p} \cdot t\right)$$

1. falls $T_{Wasser} = 10\,°\text{C}$:

$$T_E = 10°\text{C} + (40°\text{C} - 10°\text{C}) \cdot \exp\left(-\frac{500\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot\text{K}} \cdot 0{,}03\,\text{m}^2}{0{,}5\,\text{kg} \cdot 4 \cdot 10^3\,\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}} \cdot 300\,\text{s}\right) = 13{,}2°\text{C}$$

2. falls $T_{Wasser} = 25\,°\text{C}$

$$T_E = 25°\text{C} + (40°\text{C} - 25°\text{C}) \cdot \exp\left(-\frac{500\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot\text{K}} \cdot 0{,}03\,\text{m}^2}{0{,}5\,\text{kg} \cdot 4 \cdot 10^3\,\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}} \cdot 300\,\text{s}\right) = 26{,}6°\text{C}$$

3. falls $T_{Wasser} = 10\,°\text{C}$, aber die Dose nur bis zur Hälfte im Wasser steht: $A = 0{,}015\,\text{m}^2$

$$T_E = 10°\text{C} + (40°\text{C} - 10°\text{C}) \cdot \exp\left(-\frac{500\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot\text{K}} \cdot 0{,}015\,\text{m}^2}{0{,}5\,\text{kg} \cdot 4 \cdot 10^3\,\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}} \cdot 300\,\text{s}\right) = 19{,}7°\text{C}$$

3. falls die Dose in der Luft abgekühlt wird: $\alpha = 50\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot\text{K}}$

$$T_E = 10°\text{C} + (40°\text{C} - 10°\text{C}) \cdot \exp\left(-\frac{50\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2\cdot\text{K}} \cdot 0{,}03\,\text{m}^2}{0{,}5\,\text{kg} \cdot 4 \cdot 10^3\,\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}} \cdot 300\,\text{s}\right) = 33{,}9°\text{C}$$

6) Diskussion: Ergebnisse vergleichen.